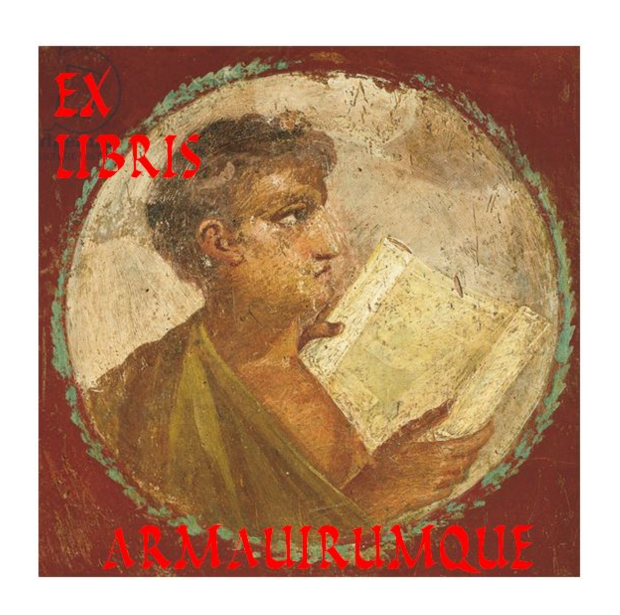
TRATADOS I. COMENTARIOS

Arquímedes
Eutocio

BIBLIOTECA CLÁSICA GREDOS

BIBLIOTECA CLÁSICA GREDOS, 333



ARQUÍMEDES

TRATADOS

I

SOBRE LA ESFERA Y EL CILINDRO - MEDIDA DEL CÍRCULO - SOBRE LOS CONOIDES Y ESFEROIDES

•

EUTOCIO

COMENTARIOS

(SELECCIÓN)

INTRODUCCIONES, TRADUCCIÓN Y NOTAS DE

PALOMA ORTIZ GARCÍA



EDITORIAL GREDOS

Asesor para la sección griega: CARLOS GARCÍA GUAL.

Según las normas de la B. C. G., la traducción de este volumen ha sido revisada por M.ª LUISA PUERTAS CASTAÑOS.

Sánchez Pacheco, 85, Madrid, 2005.
www.editorialgredos.com

Depósito Legal: M. 8767-2005.
ISBN 84-249-2756-7. Obra Completa.
ISBN 84-249-2757-5. Tomo I.
Impreso en España. Printed in Spain.
Gráficas Cóndor, S. A.
Esteban Terradas, 12. Polígono Industrial. Leganés (Madrid), 2005.
Encuadernación Ramos.

INTRODUCCIÓN GENERAL

ARQUÍMEDES

Vida de Arquímedes: datos biográficos y anécdotas literarias

Frente a la ausencia prácticamente total de datos con que nos encontramos al acercarnos a la biografía de Euclides, sobre Arquímedes, en comparación, estamos relativamente bien informados. No porque haya llegado hasta nosotros la biografía que Eutocio atribuye a un cierto Heraclidas, sino gracias, más bien, a las indicaciones del propio Arquímedes, las referencias historiográficas de Polibio y Tito Livio y el encomio literario de Plutarco, a lo que hay que sumar algunos datos transmitidos por Cicerón y por los matemáticos posteriores.

Sabemos con certeza que era natural de Siracusa y que su muerte se produjo durante el saqueo de esta ciudad en 212 a. C., en el transcurso de la Primera Guerra Púnica, tras ser tomada la ciudad por las tropas romanas comandadas por Marco Marcelo. Algunas noticias, aunque tardías, puesto que proceden de la época bizantina, afirman que falleció a los 75 años, de manera que se suele fechar su nacimiento en 287 a. C. El propio Arquímedes menciona a su padre, Fi-

dias, y nos dice de él que era astrónomo y que había llevado a cabo una estimación de la relación entre los diámetros del Sol y la Luna[1]: la ocupación del padre desempeñó seguramente un papel relevante en la formación primera y la vocación del hijo.

Diodoro de Sicilia[2] atribuye a Arquímedes una estancia en Egipto, concretamente en Alejandría, y es probable que así fuera, puesto que como sede de la Biblioteca y el Museo era el lugar más adecuado para profundizar en el estudio de las matemáticas; además, Arquímedes deja en sus obras constancia de la relación que mantenía con algunos estudiosos de aquella ciudad a los que debió de conocer por entonces. Entre sus corresponsales alejandrinos constan los nombres de Conón, Dosíteo y Eratóstenes. El primero era un matemático y astrónomo famoso sobre todo por haber dado nombre a la constelación conocida como «Cabellera de Berenice». Arquímedes habla de él como «amigo y hombre que ha llegado a ser admirable en matemáticas» y afirma que solía «escribirle teoremas matemáticos que antes no habían sido estudiados», aunque no sabemos cuál pudo ser el contenido de esa correspondencia, pues no se nos ha conservado ningún testimonio directo de la misma. De Dosíteo sabemos que Arquímedes probablemente no había tenido trato personal previo con él, sino que decidió empezar a remitirle los resultados de sus investigaciones tras saber de la muerte de

---

[1] *Arenario* 9 (II 220, 21-22).

[2] *Biblioteca histórica* V 37: «...extraen los flujos de las aguas con los llamados *kochlías* egipcios que descubrió Arquímedes de Siracusa cuando estuvo en Egipto... Verdaderamente bien puede uno quedar admirado de la imaginación del artífice no sólo en esto sino también en otros muchos grandes inventos famosos en todo el mundo habitado sobre cuyas particularidades halaremos más en detalle cuando nos refiramos a la época de Arquímedes...». Lamentablemente, las explicaciones que Diodoro promete figuraban en la parte de su obra que no ha llegado hasta nosotros.

Conón y por haber oído que Dosíteo «había conocido a Conón y estaba familiarizado con la geometría». A éste le envió los dos libros de la *Esfera y el cilindro* y los tratados *Sobre conoides y esferoides, Sobre las líneas espirales* y la *Cuadratura de la parábola*[3]. En cuanto a Eratóstenes, el bien conocido matemático y filólogo, sucesor de Apolonio de Rodas en la dirección de la Biblioteca de Alejandría, se ha sugerido que la correspondencia de Arquímedes con él pudo nacer a raíz del renombre como matemático de que Eratóstenes hubo de gozar en Alejandría, cosa probable, puesto que antes de remitirle el *Método* le había enviado los enunciados de *Método* 1 y 2 invitándole «a descubrir sus demostraciones» que, hasta el momento, no le había comunicado; Arquímedes, además, le considera digno receptor de sus descubrimientos y capaz de obtener nuevos rendimientos de ellos, pues en la carta que precede al tratado afirma: «Y al ver, como digo, que eres estudioso y que destacas notablemente en filosofía y que aprecias la teoría matemática cuando es el caso, probé a escribirte y a definir en este mismo libro la peculiaridad de cierto método mediante el cual, cuando te lo haya proporcionado, te será posible disponer de recursos para poder estudiar algunos asuntos matemáticos por medio de la mecánica». Eratóstenes fue destinatario también del *Problema de los bueyes,* que Arquímedes le envió sin la solución (aunque no sabemos si lo hizo antes o después de enviarle el *Método)* para que lo estudiara y lo sometiera a la consideración de los círculos alejandrinos de estudiosos de las matemáticas.

Una vez que Arquímedes regresó de Egipto a su patria, mantuvo cierta relación con Hierón, tirano de Siracusa —tal

[3] Aunque no fue ese el orden de remisión; para mayor detalle sobre ese punto, véase más adelante el apartado relativo a la cronología de las obras de Arquímedes (págs. 25 y ss.).

vez por estar emparentado con él, como sugiere Plutarco[4]— y varias anécdotas ponen en conexión a ambos personajes. La más conocida cuenta que en una ocasión Arquímedes le había escrito que era posible mover mediante una fuerza dada un peso dado; tan convencido estaba de su aserto que incluso aseguraba que si le dieran otra Tierra, tras pasar a aquélla movería ésta (la versión más conocida y abreviada de esta anécdota atribuye a Arquímedes la frase «Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo»). Hierón le pidió una demostración; Arquímedes hizo sacar a tierra, con gran esfuerzo y ayuda de gran número de hombres, una nave de tres palos de la flota real e introdujo en ella carga y tripulación; luego «él, sentado fuera, no con esfuerzo, sino poniendo en marcha tranquilamente con la mano un mecanismo de varias poleas, la atrajo hacia sí suavemente y sin sacudidas, como si avanzara por el mar»[5].

Otra de las anécdotas en las que participa Hierón cuenta que el tirano deseaba consagrar a los dioses una corona votiva y para ello entregó el oro al orfebre; la corona, una vez realizada, pesaba lo mismo que el metal entregado, pero Hierón sospechaba que una parte del oro había sido sustituida por plata; para salir de dudas solicitó de Arquímedes que ideara un medio para comprobarlo. Mientras se ocupaba mentalmente en esta tarea, Arquímedes tomaba un baño: a medida que se sumergía, el agua iba desbordándose de la bañera, y ese hecho es el que le sugirió la solución del problema. Emocionado por el hallazgo, salió corriendo desnudo como estaba al tiempo que gritaba: *¡Heúrēka, heúrēka!* («¡Lo encontré, lo encontré!»); a continuación, puso a prueba su intuición sumergiendo en una vasija llena de agua vo-

---

[4] Plutarco, *Vida de Marcelo* 14, 12.

[5] Plutarco, *Vida de Marcelo* 14, 13.

lúmenes de oro y de plata de peso igual al de la corona y haciendo lo mismo con ésta; comparando los volúmenes de agua desplazados calculó el porcentaje de cada metal que había en la joya y demostró el engaño del orfebre[6].

Estas notabilísimas muestras de inventiva fueron, según Plutarco, las que impulsaron a Hierón a encargarle las tareas de ingeniería que más tarde, cuando los romanos atacaron Siracusa, serían de tanta utilidad a la ciudad y fuente de tanta fama para el matemático.

Polibio, que fue apenas una generación posterior a Arquímedes y pudo, por tanto, conocer los hechos por testimonios muy próximos —si no directos— describe el detalle de las acciones bélicas en un largo pasaje cuyas noticias recoge en su obra Tito Livío, quien, por su parte, añade el relato más antiguo sobre la muerte del matemático. Plutarco, aproximadamente un siglo más tarde, compone con esos mimbres el cesto de su encomio historiográfico-literario[7], amenísimo y colmado de anécdotas... difícilmente contrastables.

Gracias a estos autores sabemos que durante esa campaña, en efecto, Arquímedes desempeñó un importante papel en la defensa de su ciudad natal mediante el empleo de ingenios que él había ideado y fabricado: máquinas que lanzaban a gran distancia grandes piedras que hundían las naves; otras que disparaban a menor distancia proyectiles me-

---

[6] VITRUVIO, *Sobre la arquitectura* I 3. Aunque esta anécdota suele relacionarse en general con el principio de hidrostática llamado «de Arquímedes», el relato de Vitruvio no tiene, como vemos, gran cosa que ver con él, sino que más bien parece estar relacionado con la intuición de la noción de peso específico. El principio de Arquímedes aparece estudiado en el tratado *Sobre los cuerpos flotantes*.

[7] Los pasajes a que hacemos referencia se encuentran en POLIBIO, *Historias* VIII 3-7; LIVIO, XXIV 34 y XXV 31; PLUTARCO, *Vida de Marcelo* 14-19.

nores destinados a los soldados atacantes; manos de hierro que, accionadas mediante un contrapeso de plomo, agarraban las naves romanas cuando se acercaban con sus «arpas»[8] y las suspendían con la proa en el aire para luego dejarlas caer de golpe con severos daños para las embarcaciones y el consiguiente espanto de soldados y tripulantes. Una fuente tardía pero no exenta de credibilidad, el matemático e ingeniero Antemio de Trales (s. VI), que fue uno de los arquitectos de Santa Sofía, refiere que Arquímedes consiguió incendiar las naves romanas mediante otro invento aún más llamativo, el de los «espejos ustorios»[9]. Según él,

---

[8] Ingenio bélico que describe Polibio, consistente en unas escaleras protegidas que eran izadas mediante poleas sujetas a los mástiles hasta apoyarlas en la muralla, desde donde los atacantes podían pasar a los muros y adentrarse en la ciudad; el nombre de «arpas» lo reciben de la forma que tomaba el artilugio al quedar apoyado en el muro, forma muy semejante a la de cierta clase de arpa que los griegos llamaban *sambýkē;* para actuar del modo indicado, las naves romanas tenían que aproximarse mucho a la muralla, momento que aprovechaba Arquímedes para poner en funcionamiento sus «manos de hierro».

[9] En la proposición 2 de *Perì paradóxōn mēchanēmátōn* (= *Sobre artilugios extraordinarios,* editado por HEIBERG en *Mathematici graeci minores,* Copenhague, 1927, págs. 81-2), plantea el problema en los siguientes términos: «Cómo en un lugar dado, a una distancia no menor de un tiro de flecha, construiremos ⟨un artilugio⟩ que produzca un incendio mediante los rayos solares». Y a continuación explica: «Según los que han expuesto la construcción de los indicados espejos ustorios, parece que lo propuesto es de todo punto imposible; pues vemos que los espejos ustorios siempre miran al sol cuando producen el incendio mientras que, si el lugar indicado no está en línea recta con los rayos solares, sino inclinado a otra parte o hacia el lado contrario, de ese modo no es posible que resulte lo propuesto mediante los espejos ustorios indicados. Además, por causa de la amplia distancia hasta el incendio y el gran tamaño del espejo ustorio, según las explicaciones de los antiguos, resulta forzosamente imposible que ⟨tal cosa⟩ se produzca. Pero no cabe dejar a un lado la fama, relatada unánimemente por todos los historiadores, de que Arquímedes incendió las naves de los enemigos mediante los rayos solares, y por ese motivo es de necesi-

lo consiguió no por medio de un espejo parabólico, sino mediante un artilugio formado por veinticuatro espejos planos. Este último relato, a pesar de contar con el apoyo de algunas otras fuentes, ha hecho correr ríos de tinta, casi siempre con el encarnizado propósito no ya de negarlo, sino de demostrar su imposibilidad desde el punto de vista de la física y la técnica[10]. Desde el punto de vista filológico, lo que más crédito resta a las fuentes que transmiten esta noticia es el hecho de que los autores más antiguos —Polibio, Tito Livio, Plutarco— no mencionen esta invención. Luciano de Samosata, que es el primero en hacer referencia al asunto, dice sólo que «prendió fuego a las trirremes de los enemigos gracias a su arte *(têi téchnēi)*»[11], sin mencionar los espejos, y Galeno emplea la expresión equívoca *dià tôn pyríōn,* que tanto puede referirse a «espejos ustorios» como a «materias inflamables».

---

dad, razonablemente, que sea posible la resolución del problema, y yo, tras darle crédito y estudiarlo, voy a exponer la construcción de un artilugio de esa especie explicando antes brevemente ciertas cosas necesarias para lo propuesto».

[10] El escepticismo sobre la veracidad de la noticia es antiguo, como lo evidencia el pasaje de Antemio que acabamos de citar. En cuanto a la literatura moderna sobre ese punto, pueden consultarse Dijksterhuis, *Archimedes,* Princeton, 1987, págs. 28-29, quien, en resumen, se muestra convencido de la imposibilidad de la existencia de los espejos ustorios, y P. Thuillier, *De Arquímedes a Einstein. Las caras ocultas de la investigación científica,* Madrid, 1990, vol. I, págs. 45-78, quien, por el contrario, pretende demostrar, contra las opiniones de la mayoría, que la noticia de Antemio de Trales *puede* sí ser cierta. También Stamatis ha reproducido informes y noticias periodísticas en griego, inglés y ruso sobre los espejos ustorios en un opúsculo publicado en Atenas en 1982 (no he podido consultarlo; tomo la referencia del ensayo bibliográfico añadido por Knorr a la traducción inglesa del *Arquímedes* de Dijksterhuis).

[11] Luciano, *Hipias* o *El baño* (ed. MacLeod, I 3, 2).

Sea lo que fuere de esa cuestión, la situación de la empresa bélica contra Siracusa vino a ser tal que Marco Marcelo tuvo que renunciar al ataque por mar; Polibio dice que «se llevó un gran disgusto, pero al cabo se mofó de sus propias acciones y dijo que Arquímedes con las naves romanas sacaba el agua para mezclar con el vino, y que sus arpas, caídas en desgracia, habían quedado excluidas del banquete» [12]. En el ataque por tierra sucedieron cosas muy semejantes, de manera que las tropas romanas, cuenta Plutarco, «si se veía un cable o un madero que sobresalía un poco por encima de la muralla, gritando que Arquímedes ponía en marcha otro ingenio contra ellos, se retiraban y huían» [13].

A pesar de las máquinas de Arquímedes, que hicieron imposible consumar el asalto de la ciudad, Marco Marcelo logró al fin tomarla por asedio. En medio de la confusión provocada por los soldados entregados al pillaje, Arquímedes, indiferente, estaba inclinado sobre unos dibujos que había trazado cuando uno de los soldados, tras una disputa, lo mató. Marcelo se disgustó por ello, pues quería haber conocido al hombre que le puso en tantas dificultades, y se encargó de avisar a sus parientes y de que se le diera sepultura como convenía a hombre tan notable. Plutarco nos transmite que era deseo de Arquímedes que en su tumba figurara la relación entre el cilindro y la esfera inscrita en él, relación que Arquímedes había descubierto y demostrado, según figura en el tratado *Sobre la esfera y el cilindro*. Y cuenta Cicerón que cuando él fue a Sicilia como cuestor en el año 75 a. C., consiguió encontrar, cerca de la puerta de Acradina,

---

[12] Polibio, *Historias* VIII 6, 6.

[13] Plutarco, *Vida de Marcelo* XVII 4.

una columna sepulcral oculta bajo la maleza en la que, efectivamente, estaban representadas la esfera y el cilindro [14].

Los relatos que hemos referido han conformado durante siglos la fama de Arquímedes, y no podemos dejar de señalar que incluso la literatura de divulgación de nuestros días —y en ella incluyo las informaciones que circulan por la red— hace más hincapié en esos puntos que en cualesquiera otros relativos al matemático. Sin embargo, no cabe dejar de lado la consideración de que era tradicional en la literatura biográfica de la Antigüedad la invención de anécdotas que permitieran situar cronológicamente al biografiado o poner de relieve sus logros o las características más destacadas del personaje [15]: y sucede que las anécdotas relatadas vienen,

---

[14] Este relato de la muerte de Arquímedes es el que aparece en LIVIO, XXV 9-10. Plutarco ofrece otras dos versiones, variantes enriquecidas de la transmitida por Tito Livio. Un mosaico de Herculano reproduce la escena con la particularidad de que no representa a Arquímedes agachado mirando al suelo, sino trabajando en una mesita con sus papiros extendidos sobre ella. El deseo de Arquímedes en cuanto a su epitafio lo mencionan PLUTARCO, *Vida de Marcelo* 17, 12, y CICERÓN, *Tusculanas* V 64-66. El estudio de la relación entre el cilindro y la esfera inscrita en él aparece en *Sobre la esfera y el cilindro* I 34, porisma; la génesis mecánica del teorema se encuentra en *Método* 2.

[15] Recuérdese cómo los antiguos fechaban a los poetas trágicos poniéndolos en relación con la batalla de Salamina: Esquilo luchó en ella como soldado, Sófocles formó parte del coro de jóvenes que celebraron la victoria, Eurípides nació en la isla de Salamina cuando los atenienses se refugiaron allí; la anécdota viene a indicarnos que la diferencia de edad entre ellos era, aproximadamente, de media generación. O cómo ciertas fuentes relatan que la tumba de Eurípides y su cenotafio en Atenas fueron destruidos por el rayo: nos recuerdan así el ateísmo de Eurípides y su castigo imperecedero. Otro ejemplo puede ser el que describe el rigor del matemático Euclides ante Alejandro Magno: «No hay camino real para la matemática»; la anécdota viene a poner de relieve que fueron parcialmente contemporáneos.

precisamente, a resaltar los principales descubrimientos de Arquímedes. El «Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo» nos recuerda que fue Arquímedes el primero en formular matemáticamente la ley de la palanca; el *Heúrēka,* que fue el descubridor del primer principio de la hidrostática; los espejos ustorios nos deberían llevar a considerar sus trabajos en materia de catóptrica —aunque perdidos, sabemos que él fue el primero en observar la refracción de la luz—; la inscripción funeraria sobre el cilindro y la esfera nos remite a sus descubrimientos sobre el volumen y la superficie de la esfera... La «muerte entre los círculos» es paralela al despiste de Tales, que cayó en un pozo mientras observaba las estrellas, con gran regocijo de la esclava que lo atendía, con lo que nos los representamos como «sabios despistados», más interesados en su mundo intelectual que en las banalidades de la existencia cotidiana. Y obsérvese que todas estas anécdotas pueden resumirse en poquísimas palabras; a veces, incluso, en una sola frase. De modo que alguna sospecha sí que cabe sobre si estos relatos son testimonio de los hechos de la vida del matemático o muestra de la maestría de la Antigüedad en materia de invención biográfica y de recursos mnemotécnicos.

Pero haya en ellos lo que haya de veracidad, no podemos perder de vista que contienen las referencias más difundidas sobre la vida del matemático. Otras fuentes algo menos conocidas atribuyen a Arquímedes tres llamativas construcciones mecánicas más: el tornillo de Arquímedes, un planetario y un órgano hidráulico.

El *kochlías* o tornillo de Arquímedes era un mecanismo para extraer agua de lugares inundados que, según diversos testimonios, Arquímedes puso en funcionamiento en Egipto para regar terrenos a los que no alcanzaban las crecidas del Nilo y que también se utilizó en las minas de Hispania para

extraer el agua de las galerías inundadas. Respecto al planetario, Cicerón nos ha conservado una descripción[16]: en él, al ponerse el Sol en movimiento, la Luna y los planetas reproducían el mismo movimiento que cursarían en un día respecto de una bóveda de estrellas fijas: unos versos de Claudio Claudiano *(Carmina Minora* LI) narran la sorpresa de Júpiter al ver el mundo reproducido por obra de un ser humano[17]. En cuanto al órgano hidráulico, estamos aún peor informados: sólo Lactancio lo menciona y lo hace para comparar con él la naturaleza del alma: igual que el órgano es uno, a pesar de estar compuesto de muchas partes, así también el alma, a pesar de la variedad de sus funciones, es sólo una.

Por otro lado, las fuentes antiguas nos hablan de la existencia de planetarios y órganos hidráulicos en fechas más antiguas, de manera que la atribución a Arquímedes de estos dos mecanismos debemos interpretarla más bien en el sentido de que llevó a cabo modelos especialmente bien logrados de inventos ya conocidos; en cuanto al *kochlías,* Ateneo y Diodoro dicen que fue invención suya, pero un testimonio de Estrabón[18], en el que describe un ingenio semejante sin atribuírselo a Arquímedes hace dudosa esta afirmación.

Como vemos, la fama más extendida sobre Arquímedes no hace referencia tanto a su labor de geómetra como a su

[16] *Tusculanas* I 25.

[17] También es CICERÓN *(República* I 14) la fuente que nos informa de la presencia en Roma de dos planetarios obra de Arquímedes, uno de ellos «único botín con el que el antepasado de Marcelo quiso adornar su casa tras la toma de Siracusa», trabajo del que Cicerón había oído hablar como la obra maestra de Arquímedes, pero que «a primera vista no me pareció cosa extraordinaria»; respecto al otro ejemplar cuenta que «Marcelo había depositado en el templo de la Virtud otra esfera de Arquímedes, más conocida por la gente y mucho más aparente».

[18] *Geografía* XVII.

inventiva en el terreno de la ingeniería, y esa fama, nacida en la Antigüedad, se prolongó a lo largo de toda la Edad Media. Sin embargo, si escribió algo sobre esas materias no nos ha llegado noticia. Según Plutarco —pero ya venimos viendo que las versiones de los hechos que este autor nos ofrece son muy personales y no siempre están del todo libres de intención literaria ni de prejuicio— estas ocupaciones no eran para él más que entretenimientos sobre los que no quiso dejar ningún escrito «considerando innoble y menestral el ocuparse de la mecánica y, en general, de cualquier arte que tocara la utilidad»[19].

Obras

Las obras que se nos han conservado de Arquímedes son todas de carácter teórico, dedicadas unas a la geometría y otras a la física matemática. En griego se nos han conservado los dos libros *Sobre la esfera y el cilindro, Sobre la medida del círculo, Sobre conoides y esferoides, Sobre las espirales,* los dos libros *Sobre el equilibrio de las figuras planas,* el *Arenario,* la *Cuadratura de la parábola,* los dos libros *Sobre los cuerpos flotantes,* el *Stomachion,* el *Método,* el *Problema de los bueyes* y breves fragmentos —o resúmenes— de sus trabajos sobre los polígonos semirregulares y sobre catóptrica.

Desde ahora hay que hacer constar que una ojeada somera a los textos nos hace ver que la mayor parte de las obras no nos han llegado completas ni con los *ipsissima verba* que Arquímedes empleó para redactarlas. Unas tienen carácter fragmentario por causa del deterioro del soporte escriptorio: tal es el caso del *Método,* el *Stomachion* o el libro II de los *Cuerpos flotantes,* transmitidas de modo incomple-

[19] *Vida de Marcelo* XIV y XVII.

to por un único manuscrito, el famoso palimpsesto de Jerusalén, o de los dos libros *Sobre los cuerpos flotantes,* de los que algunas partes sólo nos han llegado en versión latina. Otras han padecido resúmenes y refecciones en el curso de sucesivas adaptaciones a su uso escolar, como se evidencia en la *Medida del círculo* y en las obras transmitidas en árabe. Muchas, como consecuencia de la desaparición de los antiguos dialectos, han perdido el original dorio de Siracusa en que Arquímedes escribía para ser vertidas a la *koinè diálektos,* el «dialecto común», generalizado a partir de la época helenística en la expresión literaria y que, al evolucionar, produciría el griego bizantino y el griego moderno: así ha sucedido con la *Esfera y el cilindro,* la *Medida del círculo,* la *Cuadratura de la parábola,* el *Stomachion,* el *Método* y el *Problema de los Bueyes.*

Aún así, el corpus de obras conservadas nos da pie más que suficiente para reconocer los dos rasgos más característicos de la obra de Arquímedes: profundidad y originalidad, perceptibles tanto en los temas abordados como en los métodos empleados. Ambas peculiaridades están en relación directa con una tercera característica: no son, como los *Elementos* de Euclides o las *Cónicas* de Apolonio, recopilaciones de descubrimientos matemáticos anteriores, ordenadas y completadas por sus autores con finalidad principalmente didáctica; los escritos de Arquímedes son verdaderos ensayos científicos, destinados a dar a conocer a la comunidad matemática los nuevos descubrimientos realizados por su autor.

Algunos de ellos derivan de las líneas de investigación emprendidas y proseguidas en la matemática griega, como ocurre con la *Medida del círculo,* que pretendía —y consiguió— dar solución a uno de los tres problemas clásicos de la matemática griega mediante la intuición de renunciar a la

cuadratura estricta e intentar la triangulación y el recurso al método «de compresión»[20], o con la *Cuadratura de la parábola,* en esa misma tradición de buscar equivalencias entre áreas de figuras planas y figuras curvilíneas, la clase de problemas que suelen llamarse «de aplicación de áreas»; relacionado en cierto modo con esa clase de problemas está también el *Stomachion*, juego[21] elevado a la categoría de problema geométrico en el que se pretende dividir un cuadrado —o un rectángulo— de tal manera que las figuras resultantes de la división sean o bien iguales y semejantes o bien susceptibles, tomadas de dos en dos, de sustituir a otra u otras dos de las figuras, siempre dentro del cuadrado o el rectángulo inicial. Siguiendo aún la línea pitagórica de encontrar equivalencias entre figuras, como lo habían hecho otros matemáticos antes que él[22], pero ahora en el terreno de los sólidos, tenemos los dos libros *Sobre la esfera y el cilindro* y el tratado *Sobre conoides y esferoides.*

El resto de sus obras se apartan de la tradición geométrica más clásica para adentrarse en territorios apenas explorados: *Sobre las líneas espirales* se ocupa del estudio de la curva que hoy recibe el nombre de «espiral de Arquíme-

[20] Cf. más adelante, págs. 37-41.

[21] A juzgar por el contenido de la obra, el juego tenía cierta semejanza con nuestros *puzzles*. Los diccionarios recogen el término con la única acepción de «título de una obra de Arquímedes».

[22] En la carta-dedicatoria que precede al Libro I de *Sobre la esfera y el cilindro* Arquímedes afirma que, en el terreno al que aludimos, se deben a Eudoxo demostraciones «que parecen tan sobresalientes: la de que toda pirámide es un tercio del prisma que tiene la misma base que la pirámide e igual altura, y que todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base que el cono e igual altura», y en la carta-dedicatoria que precede al *Método* repite esa misma información añadiendo que antes que Eudoxo ya Demócrito había sido el primero en manifestar «sin demostración» dichos asertos.

des», curva de generación mecánica ideal descrita por un punto que se mueve a velocidad uniforme sobre una semirrecta que, a su vez, se desplaza radialmente en torno a su origen. La originalidad del tratado radica en que la matemática griega no había llevado a cabo hasta entonces estudios sobre curvas distintas de la circunferencia más que en el caso de las cónicas, descubiertas y estudiadas primero por Menecmo y después por Euclides[23], y de la trisectriz (o cuadratriz) de Hipias. En *Sobre el equilibrio de las figuras planas* y *Sobre los cuerpos flotantes* Arquímedes aplica el rigor de los métodos geométricos a observaciones experimentalmente comprobables pertenecientes al terreno de la estática y la hidrostática, con lo que sienta las bases de la física matemática. El único antecedente para esta clase de orientación en los estudios matemáticos tendríamos que ir a buscarlo a la *Mecánica* del corpus aristotélico, el texto griego más antiguo en que un fenómeno físico es reducido a expresión matemática, que es donde encontramos, aunque de un modo no del todo preciso, la descripción del «paralelogramo de las fuerzas». El *Arenario* —que formalmente es una carta a Gelón, hijo de Hierón de Siracusa— aborda, so pretexto de calcular el número de granos de arena necesarios para llenar el universo, el problema de la expresión y notación de cifras elevadas[24]; por último, el *Problema de los bueyes* propone

[23] Aunque no se nos han conservado esas obras, probablemente porque perdieron buena parte de su interés al ser superadas por los trabajos de Apolonio sobre ese mismo tema.

[24] Hay que recordar aquí que el proceso de abstracción que exige la tarea de contar va unido necesariamente al desarrollo científico: los pueblos primitivos resuelven sus necesidades a ese respecto sin necesidad de ir muy lejos. En las lenguas indoeuropeas es fácil reconstruir un origen común para los numerales hasta el «cien» (gr. *hekatón;* lat. *centum);* en el nombre del «mil» se detectan ya etimologías procedentes de raíces diversas (gr. *chílioi;* lat. *mille).* En Homero el numeral *mýrioi* significa «muchí-

averiguar el número de vacas y toros de los rebaños del Sol, dadas ciertas condiciones complejas—resumiendo, un sistema de siete ecuaciones con ocho incógnitas— que hacen que el problema, en términos de la matemática actual, venga a resolverse mediante una ecuación diofántica del tipo Pell-Fermat.

El *Método* merece tratamiento aparte, y no sólo por ser el único caso en la literatura matemática griega de exposición del sistema heurístico de un autor. Presenta, además, el aliciente especial de que, mencionado por varios escritores de la Antigüedad[25], el tratado parecía haberse perdido para siempre y fue completamente desconocido para Occidente hasta que en 1906 el filólogo danés Heiberg, que ya había publicado una edición de las obras conocidas de Arquímedes, tuvo noticia[26] de que un palimpsesto hierosolimitano escondía trabajos matemáticos. Se interesó por estudiar el códice, para lo cual tuvo que desplazarse a Constantinopla y fotografiarlo. El códice contenía, entre otros escritos de Arquímedes, el que ahora nos ocupa: la única versión del *Mé-*

---

simos, en número infinito» (sentido heredado, por cierto, por nuestro «miríada»), y el término pasa a significar «diez mil» sólo tardíamente. En nuestro tiempo hablamos de «millones» y «billones», pero para cifras verdaderamente elevadas... recurrimos a las potencias de diez.

[25] Herón y la *Suda* lo mencionan, aparte de la referencia explícita a la mecánica del propio Arquímedes en la *Cuadratura de la parábola* II 266, 1; esta última referencia, que resulta manifiesta ahora que conocemos el *Método,* no podía sin embargo servir de indicio a los estudiosos más antiguos dado que no aparece la palabra clave *méthodos* (ni tampoco *éphodos,* que es la que figura en el título griego de la obra arquimedea).

[26] Gracias al catálogo de las bibliotecas pertenecientes al Patriarcado de Jerusalén publicado en 1899 por el estudioso griego A. I. Papadopoulos-Kerameus (cuyo papel en el hallazgo del palimpsesto, por cierto, suele quedar postergado). El relato del descubrimiento del manuscrito y la descripción del mismo fueron dados a conocer por Heiberg en «Eine neue Archimedesschrift» *Hermes* 42 (1907), 235 y ss.

todo que ha llegado hasta nosotros. El pergamino que servía de soporte escriptorio había sido lavado y reutilizado en el siglo XIII para escribir en él un eucologio, proceso en el cual habían desaparecido varias páginas, otras habían sido borradas tan completamente que era imposible leer nada que no fuera el texto para el que se reutilizó y, además, había desaparecido el orden primitivo de las páginas. La tarea de Heiberg fue, por tanto, muy meritoria. El asunto, en todo caso, es que toda esta peripecia había mantenido la obra alejada de comentaristas y estudiosos durante casi un milenio.

Desde el punto de vista formal, es un ejemplo de correspondencia erudita con una doble finalidad: por un lado, Arquímedes había enviado a Eratóstenes los enunciados de dos teoremas sin la demostración, invitándole a descubrirla por sí mismo. Esos dos teoremas conciernen al volumen de la uña cilíndrica y de la doble bóveda cilíndrica. Ahora —le comunica Arquímedes— le envía las demostraciones, distintas de otras que ya tiene publicadas sobre el volumen de los sólidos conoides y esferoides, pues las demostraciones que le remite en ese momento tienen el interés especial de que por primera vez consigue hallar equivalencias entre figuras comprendidas por superficies planas y figuras comprendidas por superficies curvas y planas. En segundo lugar, quiere también darle a conocer un método nuevo que permite «disponer de recursos para poder estudiar algunos asuntos matemáticos por medio de la mecánica» y para ello le envía el estudio de diversos teoremas sobre áreas y volúmenes según lo había efectuado mediante el método mecánico antes de resolver con el rigor pertinente las demostraciones geométricas.

Aparte de las obras y fragmentos conservados en griego, mediante versiones árabes disponemos de restos del *Libro de los lemas,* del tratado *Sobre el heptágono inscrito en el*

círculo y de otro tratado *Sobre los círculos tangentes.* Las versiones árabes le atribuyen, asimismo, libros *Sobre las líneas paralelas, Sobre los triángulos, Sobre las propiedades de los triángulos rectángulos, Sobre clepsidras* y unos *Datos,* aunque buena parte de las referencias arquimedeas contenidas en los manuscritos árabes se entremezclan con resultados debidos a otros autores y, en particular, con trabajos de los propios matemáticos árabes que los transmiten, lo que hace especialmente delicada la tarea de discernir qué parte corresponde a quién dentro de cada obra. Los estudiosos de Arquímedes han apreciado de modo especial los fragmentos del *Libro de los lemas,* cuya versión latina incluye Heiberg en su edición, ciertas partes de los tratados *Sobre el heptágono inscrito en el círculo* y *Sobre los triángulos,* de los que Dijksterhuis se ocupa en su clásica exposición de las obras de Arquímedes, y del fragmento del *Stomachion* conservado sólo en árabe y dado a conocer por Suter, más amplio y de más interés que el conservado en griego[27].

Además, contamos también con referencias a otras obras, perdidas: el trabajo sobre los poliedros semirregulares aludido por Papo, un *De la denominación de los números* que dedicó a Zeuxipo, al que el propio Arquímedes hace referencia[28], una *Catóptrica* y una o varias obras sobre mecánica que contenían teoremas que no figuran en el *Equilibrio de los planos* —las referencias del propio Arquímedes y de otros autores de la Antigüedad parecen remitirnos a títulos como *Sobre los centros de gravedad, Sobre los equilibrios, Mecánica, Sobre las balanzas* o *Sobre las palancas*—. Las

[27] Suter, H.: «Der Loculus Archimedius oder das Syntemachion des Archimedes, arabisch und deutsch», *Zeitschrift für Mathematik und Physik, historische-litterarische Abteilung* (44 Supp. Heft) 491, 1899 (Cantor-festschrift).

[28] En *Arenario* II 216, 17-19, y 236, 17-22.

alusiones indicadas a los trabajos sobre mecánica mencionan demostraciones concretas, pero no es posible siquiera saber si se trataba de una sola obra conocida por varios títulos o de varias obras referentes a temas emparentados entre sí y con la mecánica.

Cronología de las obras conservadas

La ordenación seguida a lo largo del último siglo en la presentación de las obras de Arquímedes deriva directamente del orden propuesto en su edición por Heiberg, quien, a su vez, siguió fundamentalmente la ordenación de los manuscritos[29]. Que esa ordenación no se correspondía con la secuencia cronológica de la composición de los tratados era cosa manifiesta ya para Torelli en 1792, y sus observaciones, ampliadas por Heiberg y Heath, han sido utilizadas en los trabajos de Dijskterhuis, Itard, Claggett y Mugler con pocas alteraciones[30].

El criterio principal en el que se basan las reconstrucciones cronológicas es de orden filológico: ya dijimos más atrás que algunas de las obras de Arquímedes van precedidas de una carta, y dos de esas cartas, las que preceden a los tratados sobre *Cuadratura de la parábola* y *Espirales,* son especialmente significativas a este respecto. Por la dedicatoria de *Cuadratura de la parábola* sabemos que éste fue el primer tratado que Arquímedes envió a Dosíteo, pues allí se lee: «Al oír que había muerto Conón, cuya amistad nunca me faltó, y que tú habías conocido a Conón y que estabas

---

[29] Para ser exactos, presentó las obras en el orden en que figuran en los manuscritos derivados de A, que representan la tradición textual más extendida, y añadió después las obras que sólo conocemos por el palimpsesto de Jerusalén.

[30] Ver Eecke renuncia al debate sobre la cuestión cronológica al admitir el orden propuesto por Heiberg como «el más racional posible».

familiarizado con la geometría, me entristecí por el difunto en su calidad de amigo y de hombre que ha llegado a ser admirable en matemáticas, y me propuse enviarte por escrito, igual que solía escribir a Conón, teoremas matemáticos que antes no habían sido estudiados, pero que ahora han sido estudiados por mí»[31]. Esta misiva podemos fecharla, según Knorr, en fecha posterior a 246 a. C.

Por otra parte, en la dedicatoria de *Espirales* y como respuesta a la petición de Dosíteo de que le envíe ciertas demostraciones, Arquímedes enumera las obras que ya le ha enviado y las que le envía en ese momento: en primer lugar cita los principales resultados de los dos libros *Sobre la esfera y el cilindro,* cuyas demostraciones —dice— le había remitido por medio de Heraclidas; a continuación, los de *Conoides y esferoides,* cuyas demostraciones aún no le ha enviado; y por último, los problemas sobre las espirales que le remite en ese momento. La secuencia de los escritos enviados a Dosíteo, por tanto, fue: *Cuadratura de la parábola, Sobre la esfera y el cilindro, Sobre las espirales* y *Sobre los conoides y esferoides,* y no parece muy aventurado suponer que fueron compuestos en ese mismo orden.

[31] Ignoramos las fechas precisas de la vida de Conón, pero una mezcla de leyenda e historia nos permite construir una aproximación temporal: según la leyenda poética forjada en Alejandría, cuando Ptolomeo III Evérgetes partió a la guerra contra Seleuco (Tercera Guerra Siria, 246-241 a. C.), la reina ofrendó a la diosa Afrodita su cabellera por la salud de su esposo, pero la cabellera desapareció del templo. Se atribuye a Conón la finura cortesana de haberla reconocido en el cielo transformada en una nueva constelación: la «Cabellera de Berenice» y, dado que la correspondencia entre Arquímedes y Dosíteo hubo de ser posterior, queda la fecha de 246 a. C. como *terminus post quem* para el comienzo de esa relación epistolar. CALÍMACO incluyó en sus *Catasterismos* el poema que compuso sobre los hechos citados, poema que, a su vez, fue traducido por CATULO en su poema 66.

En tercer lugar, el *Arenario* 19 (II 230, 3-7) cita de un modo muy preciso el resultado de la proposición 3 de la *Medida del círculo:* «Sabes que yo demostré que la circunferencia de todo círculo es mayor que el triple del diámetro en menos de la séptima parte», de modo que este pasaje es tenido por testimonio definitivo para la datación relativa de ambas obras, aunque no da pie para relacionar su cronología con la de los tratados remitidos a Dosíteo.

El segundo de los criterios empleados tiene que ver con la relación interna entre los tratados: si en uno de ellos se utilizan como argumento resultados obtenidos en otro, se toma por indicio válido a efectos de ordenación cronológica. Tenemos, por ejemplo, el caso de *Cuadratura de la parábola* (props. 6, 8, 10) en donde se recogen resultados procedentes de *Equilibrio de los planos* I (props. 6, 7, 14, 15)[32], mientras que en *Equilibrio de los planos* II (prop. 10) se recogen resultados de *Cuadratura de la parábola* (prop. 3), aunque no se menciona la obra de la que proceden: de ahí que, en general, se restituya la secuencia *Equilibrio de los planos* I/*Cuadratura de la parábola*/*Equilibrio de los planos* II. Del mismo modo, puesto que en *Sobre los cuerpos flotantes* I (props. 8 y 9) se da por demostrado —sin mencionar literalmente la obra— el contenido de *Equilibrio de los planos* I 8 y que en *Sobre los cuerpos flotantes* II (props. 2, 3, 4, 6 ,7, 8 *et al.)* se emplea el resultado de *Sobre conoides y esferoides* 11 (relativo al volumen del paraboloide de revolución), se propone para los libros *Sobre cuerpos flotantes* una fecha de redacción posterior a la de *Sobre conoides y esferoides*.

[32] Que aquí recibe el nombre de *Mecánica (dédeiktai gàr toûto en toîs Mēchanikoîs);* a este respecto, cf. más atrás, pág. 25.

Al entender de los estudiosos mencionados más arriba, no disponemos de otros datos fehacientes, de manera que, dejando a un lado los *scripta minora,* queda pendiente la localización del *Método* y de la *Medida del círculo* (y, dependiendo de la datación de éste último, la del *Arenario).* En lo relativo a la *Medida del círculo,* Torelli y Heiberg se sirven de un tercer criterio, mucho más arriesgado, consistente en poner en relación los tratados según el tema que desarrollan: dado que en *Medida del círculo* 1 y en *Sobre la esfera y el cilindro* Arquímedes asume sin prueba que la secuencia de polígonos inscritos en el círculo puede acercarse tanto como se quiera al área del círculo a medida que duplicamos el número de lados, y a la vista, según Torelli, de que los principales resultados de la *Esfera y el cilindro* carecen de utilidad práctica si no se ha alcanzado una estimación numérica de π, llegan a la conclusión —no demasiado evidente, a nuestro entender— de que la *Medida del círculo* es posterior a *Sobre la esfera y el cilindro.*

Tras el descubrimiento del palimpsesto de Jerusalén, Heiberg, y con él Heath, Dijksterhuis y Claggett, optan por proponer, por un lado, una cronología «tardía» para la *Medida del círculo,* mientras que para el *Método* proponen una cronología «temprana» pero posterior a la *Cuadratura de la parábola* —ya que en la carta que precede a este tratado Arquímedes hace ver que para entonces ya había empezado a emplear su famoso método mecánico[33] y, a la vez, en el *Método* afirma haber defendido ese método en escritos ante-

[33] «Tras redactar las demostraciones de esto ⟨*scil.*, «las relativas al área del segmento parabólico»⟩ te las envío primero como fueron resueltas por el método mecánico, y después también como se demuestran por el método geométrico» (II 264, 26-266, 2).

riores[34]—. Itard, sin embargo, seguido por Mugler, prefiere considerar el *Método* una especie de testamento científico de Arquímedes y propone para él una cronología tardía.

Pero la insuficiencia de algunos de los argumentos expuestos se hace patente en las dubitaciones de los propios autores de los razonamientos: a pesar de lo indicado más atrás, Heiberg sitúa al final de su lista cronológica y con un interrogante la *Medida del círculo,* Heath propone cronologías distintas en su traducción de las obras de Arquímedes y en *A History of Greek Mathematics* y otro tanto hace Itard en la *Historia General de las Ciencias* y en *Mathématiques et Mathématiciens*. Ante esa situación, y en la idea de que la cronología de la composición de los tratados podría servir de clave para una comprensión más profunda de la obra de Arquímedes, W. R. Knorr emprendió la tarea de examinar de nuevo esta cuestión. En un extenso artículo[35] revisa las fuentes textuales y las argumentaciones que resumíamos más arriba y analiza los métodos matemáticos de los que Arquímedes se sirve. Utilizando como criterio la mayor o menor intervención de los métodos euclidianos y de los métodos originales del propio Arquímedes, concluye que cabe considerar dos etapas en los trabajos del siracusano: una etapa

[34] «...al escribir el método he pretendido sacarlo a la luz a la vez porque previamente lo había defendido —no fuera que les pareciera a algunos que había estado diciendo palabras vanas— y al mismo tiempo porque estaba convencido de que arrojaría no pequeña utilidad en la matemática... Así, escribo en primer lugar lo que también lo primero se me hizo patente mediante la mecánica, que todo segmento de la sección de un cono rectángulo son cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base e igual altura, y después de ello, cada uno de los teoremas obtenidos mediante el mismo método» (II 430, 11-24).

[35] Los resultados fueron publicados en «Archimedes and the Elements: Proposal for a Revised Chronological Ordering of the Archimedean Corpus», *Archiv for History of Exact Sciences* 19 (1979), 211-290.

más antigua, en la que Arquímedes, influido aún por sus años de formación, sigue los métodos —euclidianos— y la línea de investigación —problemas de áreas, fundamentalmente— más clásica en la matemática griega, y un período de madurez en el que desarrolla y emplea cada vez más a fondo el método mecánico y lo aplica a problemas estereométricos. De acuerdo con ello, propone una datación temprana para la *Medida del círculo* —quizá, según él, la más temprana de las obras de Arquímedes que conservamos— y sitúa el *Método* en la época de madurez —quizá la última de ellas—.

Los argumentos ofrecidos por Knorr no han sido plenamente aceptados: por ejemplo, según este autor Arquímedes empezó a ocuparse de mecánica al volver de Alejandría a Siracusa, cuando el rey Hierón le puso al frente de los trabajos de fortificación de la ciudad; Krische[36] hace la objeción siguiente: ¿por qué iba el rey a poner al frente de las obras de fortificación de la ciudad a un hombre aún joven, sin experiencia en tales menesteres, recién regresado de una ausencia de años y que hasta entonces sólo se había ocupado de geometría? —dejando a un lado que esta suposición de Knorr contradice lo afirmado por algunas fuentes antiguas, como el texto de Plutarco citado más atrás (pág. 10)—.

Vitrac[37], por su parte, encuentra que los procedimientos con que Knorr justifica sus asertos son «complejos e incluso, a veces, de carácter sofístico» y reprocha al análisis de Knorr «proceder como si en las matemáticas antiguas se pu-

[36] «Die Rolle der Magna Graecia in der Geschichte der Mechanik», *Antike und Abendland*, 1995.

[37] Las críticas que citamos figuran en «À propos de la chronologie des œuvres d'Archimède» *(Mathématiques dans l'Antiquité*, ed. J. Y. Guillaumin, Saint-Étienne, 1992, págs. 87-88), pero Vitrac formula otras muchas reservas a lo largo de todo el artículo.

diera aislar un aspecto técnico o metodológico correspondiente a nuestros diferentes cálculos (algebraico, diferencial, integral...) ⟨...⟩. De hecho —dice Vitrac—, las matemáticas antiguas se mantienen en un nivel de abstracción relativamente modesto en lo que concierne a los métodos; es peligroso exagerar su importancia independientemente de los contextos particulares en los que intervienen». A pesar de esto sostiene que «la cronología propuesta por Knorr es verosímil, incluso si los argumentos expuestos para sostenerla no siempre son más convincentes que los que sostenían las cronologías anteriores».

Por nuestra parte, en lo relativo a la datación de la *Medida del círculo* encontramos algunos puntos débiles en el razonamiento de Knorr[38]. Conviene, además, señalar que el propio Knorr es consciente de que frente a la cronología segura de las que llama «obras de madurez», para la cual contamos con las mutuas referencias técnicas y las indicaciones explícitas de Arquímedes, que nos certifican el orden de su presentación ante la comunidad matemática de Alejandría —aunque no el orden del descubrimiento de los resultados—, el orden que las deducciones de Knorr proponen para las que él llama obras tempranas es «menos cronológico que lógico»[39].

En lo que concierne al *Método* coincidimos en la apreciación de que fue probablemente una de las últimas obras

[38] Los elementos para ese debate son extensos, y esta introducción no es el lugar adecuado para su exposición, pero hemos de decir que el recurso frecuente al argumento *ex silentio*, el hecho de que no utilice *todos* los pasajes de la obra de Arquímedes relativos a la cuestión, el análisis abusivo de ciertos pasajes —por ejemplo, de *Método* 2 (447, 4-15)— y la frecuencia con que admite como prueba lo que no son sino conclusiones de series de hipótesis debilitan el conjunto de la argumentación de Knorr.

[39] Knorr, art. cit., pág. 270.

de Arquímedes, pero no porque nos parezca convincente la argumentación de Knorr a ese respecto, sino, sobre todo, porque disponemos de evidencias textuales: un pasaje de la carta a Eratóstenes que precede a ese tratado —pasaje que parece haber pasado desapercibido hasta ahora a todos los estudiosos— afirma explícitamente que compuso el tratado después de haber descubierto lo relativo a la medida de los conoides y esferoides:

> Ocurre que estos teoremas[40] son distintos de los que descubrí primero, pues aquellas figuras, los conoides y los esferoides y sus segmentos, las comparábamos en magnitud con figuras de conos y cilindros y se halló que ninguna de ellas era igual a una figura sólida comprendida por planos, mientras que en estas figuras, comprendidas por dos planos y superficies de cilindro, cada una ha sido hallada igual a una de las figuras sólidas comprendidas por planos.

Knorr sostiene —según necesita para justificar la posición del *Método* en su cronología relativa— que la correspondencia entre Arquímedes y Eratóstenes es posterior a la que mantuvo con Dosíteo[41]. En ese punto coincidimos con él, pero nuestro argumento se apoya en el texto del *Método*

---

[40] Se refiere a los dos teoremas cuyos enunciados había remitido previamente a Eratóstenes, sobre el volumen de la uña cilindrica y de la doble bóveda cilíndrica, respectivamente.

[41] Defiende su postura argumentando que frente a la excelente opinión que Arquímedes tenía de las capacidades matemáticas de Conón, nunca dedica una alabanza a Dosíteo, que debía ser —sugiere Knorr— menos brillante. Al saber de la valía de Eratóstenes, intentó mantener con él una relación semejante a la que tuvo con Conón, enviándole los teoremas sin demostración por si el otro era capaz de hallarlas, cosa que, según la correspondencia que poseemos, nunca pudo hacer con Dosíteo —siempre según Knorr; obsérvese que éste es uno de los casos en que recurre al argumento *ex silentio*—.

que acabamos de citar. En cualquier caso, una vez aceptado que la correspondencia entre Arquímedes y Eratóstenes es posterior al tratado *Sobre conoides y esferoides,* deberíamos también datar el *Problema de los bueyes,* remitido a Eratóstenes, dentro del último período de producción del siracusano, ya que parece razonable que las diversas cartas cruzadas con Eratóstenes fueran escritas en un período de tiempo no demasiado dilatado.

Hemos de decir, por último, que el *Stomachion* y el *Libro de los lemas* se ocupan de cuestiones que no guardan relación con los tratados de los que hasta ahora nos hemos ocupado y ese hecho, unido al estado fragmentario en que se nos han transmitido y a la ausencia de prefacios o dedicatorias, impide todo intento racional de aproximación cronológica.

El cuadro que adjuntamos recoge de modo esquemático los pareceres de los autores que hemos venido citando.

Cronología relativa según el testimonio de Arquímedes	Heath *(HGM* II 22) Claggett *(DSB)* Dijksterhuis *(Archimedes)*	Itard *(MM* 85-87) Mugler	Knorr *(AHES* [1979] 211-290)
Grupo A	(1) *Equil. Plan.* I	(1) *Equil. Plan.* I	Obras tempranas
(1) *Med. círc.*	(2) *Cuad. paráb.*	(2) *Cuad. paráb.*	*Med. círc.*
(2) *Arenario*	(3) *Equil. Plan.* II	(3) *Equil. Plan.* II	*Arenario*
	(4) *Método*	(4) *Esf. cil.* I y II	*Cuad. paráb.* 18-24
Grupo B	(5) *Esf. cil.* I y II	(5) *Espir.*	*Equil. Plan.* I y II
(1) *Cuad. paráb.*	(6) *Espir.*	(6) *Con. esfer.*	
(2) *Esf. cil. I*	(7) *Con. esfer.*	(7) *Med. círc.*	Obras de madurez
(3) *Esf. cil. II*	(8) *Cuerp. flot.* I y II	(8) *Arenario*	*Cuad. paráb.* 4-17
(4) *Espir.*	(9) *Med. círc.*	(9) *Cuerp. flot.* I y II	*Esf. cil.* I y II
(5) *Con. esfer.*	(10) *Arenario*	(10) *Método*	*Espir.*
			Con. esfer.
			Cuerp. flot. I y II
			Método

Tradición y originalidad

Se ha afirmado que la historia de la matemática griega es un relato que se abre *in medias res:* sus orígenes nos son prehistóricos en el sentido de que carecemos prácticamente por completo de testimonios fiables respecto a ellos; su desarrollo pertenecería a la protohistoria, ya que la mayor parte de los datos proceden de fuentes muy posteriores en el tiempo, y el periodo histórico se abre, salvando los tratados de Autólico de Pitane, con los *Elementos* de Euclides, en los que encontramos ya una organización formal clara y firmemente establecida. En ese sentido, poco o nada difieren las obras de Arquímedes de las de sus predecesores: al igual que las de Euclides y Autólico, comienzan con las definiciones y los postulados de los que el autor hará uso a lo largo de las demostraciones y a continuación figuran las proposiciones, ordenadas según las exigencias del método deductivo.

También la forma de las demostraciones estaba ya fijada, y cuando Proclo, en el siglo v, enumera las seis partes de que se compone una demostración geométrica *(Commentarium in I Euclidis,* pág. 203, ed. Friedlein), su descripción se ajusta por igual a la forma euclidiana, setecientos años anterior a la época de Proclo, y a la de Eutocio, cien años posterior al mismo Proclo: el enunciado *(prótasis),* que nos indica en qué consisten los datos y qué es lo que se investiga; la exposición *(ékthesis),* en la que se ofrecen los datos concretos que se han de usar; el diorismo *(diorismós),* que, en ciertos casos, ha de precisar las condiciones en las que el problema es resoluble; la construcción *(kataskeuḗ),* en la que se presentan los datos de modo práctico; la demostración *(apódeixis),* en la que se expone el razonamiento que conduce a

la resolución y, por último, la conclusión *(sympérasma),* que vuelve de nuevo al enunciado afirmando que lo demostrado concuerda con el punto propuesto a la investigación.

Lo mismo ocurre con los métodos: el de análisis y síntesis, el de reducción al absurdo, derivado del anterior, el de reducción y el llamado «de exhausción», equivalente geométrico —*mutatis mutandis*— del cálculo infinitesimal, fueron las armas racionales de que se sirvieron los matemáticos griegos.

Para el análisis y la síntesis contamos como fuente con Papo *(Synagogḗ* VII págs. 634-36, ed. Hultsch), que explica así en qué consisten estos recursos metodológicos:

> El análisis es un camino que parte de tomar lo que se investiga como cosa aceptada mediante sus consecuencias hasta llegar a la síntesis. En el análisis, suponiendo que lo investigado ya se ha producido, observamos por qué sucede y vamos de nuevo a lo que lo precedió hasta que, haciendo el camino hacia atrás de esta manera, damos con algo de lo ya aceptado o que pertenezca a la clase de los principios. Y a este método lo llamamos análisis porque es una solución camino atrás. Por la otra parte, en la síntesis, partiendo de la marcha atrás, dando por sentado el elemento último captado en el análisis, colocando ahora lo que allí precedía en su orden natural como consecuencias y componiéndolas entre sí llegamos por último a la construcción de lo investigado. Y a eso lo llamamos síntesis.
>
> Hay dos clases de análisis: el que investiga la verdad, al que llamamos 'teorético', y el que pretende llegar a hacer lo propuesto, llamado 'de problemas'. En el tipo teorético, suponiendo que lo investigado existe y es verdad, avanzamos después hacia algo aceptado mediante las consecuencias que se siguen de ello como verdaderas y existentes por hipótesis; y si lo aceptado era verdadero, será verdadero también lo investigado, pero si nos topamos con

que hemos dado por aceptado algo falso, lo investigado también será falso.

En el análisis de problemas suponemos que el problema planteado es conocido y luego, tomando por verdaderas las consecuencias de ello, avanzamos hacia algo aceptado, y si lo aceptado es posible y alcanzable, lo que los matemáticos llaman un dato, el problema propuesto será resoluble y de nuevo la demostración será una marcha atrás del análisis; pero si nos topamos con que hemos aceptado algo imposible, el problema también será irresoluble.

Derivado de los recursos de análisis y síntesis utilizaron los griegos, y con mucha frecuencia Arquímedes, la reducción al absurdo: tomando como base del análisis que lo que se intenta demostrar es falso, se avanza por las consecuencias de ese aserto y se llega a un punto en el que se niega bien un principio probado, bien uno de los datos admitidos como hipótesis, de lo que se deduce que lo que se intenta probar ha de ser verdadero.

En tercer lugar, el método de reducción, del que Proclo *(In I Euclidis Commentarium,* págs. 212-13, ed. Friedlein) nos informa en los siguientes términos:

La reducción es la traslación de un problema o teorema a otro, conocido o resuelto el cual también el planteado resultará manifiesto, como cuando se buscaba la duplicación del cubo y trasladaron la investigación a otra cuestión de la que ésta se sigue, la de hallar dos medias proporcionales, y en adelante buscaron cómo, dadas dos rectas, se hallarían dos medias proporcionales entre ellas. Dicen que el primero que aplicó la reducción a las construcciones difíciles fue Hipócrates de Quíos, que también cuadró la lúnula y descubrió otras muchas cosas en el terreno de la geometría....

La atribución del descubrimiento de este método a Hipócrates puede ser o no ser cierta, pero parece razonable

pensar, puesto que este Hipócrates es un matemático histórico sin lugar a dudas, que si no fue el inventor, debió ser uno de los primeros en aplicarlo a problemas de especial dificultad o interés.

El método de exhausción[42], aunque no fue exclusivo de Arquímedes ni invención suya, sí recibió del siracusano aportaciones fundamentales. Para valorarlas adecuadamente, recordemos que el primero en sugerir el método de aproximaciones sucesivas indefinidas, según las fuentes antiguas, había sido Antifonte, sofista contemporáneo de Sócrates, al que debemos el más antiguo intento de cuadratura del círculo. Tal y como Antifonte concebía la solución al problema, una vez inscrito un triángulo o un cuadrado[43] en el círculo, resultan unos segmentos circulares formados por cada lado del polígono inscrito y el arco correspondiente; si en cada segmento se inscribe un triángulo isósceles que tiene por base el lado del polígono inscrito primeramente, se obtiene un polígono inscrito de número de lados duplicado; podemos actuar así de modo sucesivo, y Antifonte pensó que «en algún momento se agotaría el círculo, inscribiendo de ese modo un polígono cuyos lados, por su pequeñez, coincidirían con la circunferencia del círculo. Y dado que podemos cuadrar cualquier polígono, estaríamos en posición de construir un cuadrado igual a un círculo[44]». Que el método ideado por Antifonte carecía del rigor necesario era cosa sabida

[42] El nombre de «exhausción» —que fue utilizado por primera vez por el jesuita GREGORY DE SAINT-VINCENT en 1647, en su *Opus geometricum*— ha sido frecuentemente criticado por inadecuado (cf. espte. DIJKSTERHUIS, *op. cit.,* pág.130, que considera preferible «paso indirecto al límite») pero es el que se ha impuesto para designar este método de trabajo; por esa razón conservamos el término.

[43] En esto difieren las dos fuentes que lo transmiten, TEMISTIO *(Paráfrasis de Aristóteles)* y SIMPLICIO *(Comentario a la Física).*

[44] SIMPLICIO, *Comentario a la Física,* págs. 55, 4 y ss., ed. DIELS.

en la Antigüedad, pues Aristóteles lo critica en *Física* I 2, 185a14-17: «Pero no procede rechazar todos los argumentos, sino sólo los que a partir de los principios se demuestra que son falsos, y los que no, no; por ejemplo, es cosa del geómetra rechazar la cuadratura mediante segmentos, pero la de Antifonte no es cosa del geómetra»[45]. Otra crítica antigua, más precisa, es la que nos transmite Simplicio, citando la perdida obra de Eudemo sobre la *Historia de la matemática:* «y es que cortando sucesivamente el plano entre la recta y el arco de círculo no lo agotará, ni alcanzará nunca el arco de círculo, si es que el plano es divisible indefinidamente. Y si lo alcanza, no se respeta el principio geométrico que dice que las magnitudes son divisibles indefinidamente. También Eudemo afirma que Antifonte no respeta ese principio»[46].

Posteriormente Eudoxo —junto con Arquímedes, el más notable de los matemáticos griegos— tomaría estas aproximaciones sucesivas indefinidas como fundamento para establecer, ahora sí con rigor matemático, el método de exhausción. Las obras de Eudoxo no se nos han conservado, pero Euclides nos ofrece ya una formulación rigurosa de este recurso en *Elementos* X 1, en donde se demuestra que «Si se ponen dos magnitudes desiguales y de la mayor se quita una magnitud mayor que su mitad, y de la restante se quita una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, que-

---

[45] En general, se admite que la expresión «la cuadratura mediante segmentos» se refiere a las lúnulas de Hipócrates de Quíos; la falacia de Antifonte, sin embargo, no procede del mal uso de principios geométricos, sino del más general de que las magnitudes homogéneas son infinitamente divisibles y, por tanto, un segmento curvilíneo, por muy pequeño que sea, nunca llegará a coincidir con otro rectilíneo.

[46] SIMPLICIO, *Comentario a la Física,* pág. 55, 14 y ss., ed. DIELS.

dará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada».

Arquímedes hace referencia a este método en dos ocasiones: una, en el libro I de la *Esfera y el cilindro*, en cuyo postulado 5 dice: «Y además, en las líneas desiguales y las superficies desiguales y los sólidos desiguales el mayor excede al menor en una magnitud tal que, añadida a sí misma, es capaz de exceder cualquier magnitud propuesta de las que llamamos comparables». La otra, en la carta que precede a *Cuadratura de la parábola* (II 264, 5-26), en donde, tras formularlo prácticamente en los mismos términos, afirma:

> También los geómetras anteriores utilizaron este lema, y demostraron que los círculos guardan entre sí una razón que es el cuadrado de la de sus diámetros y que las esferas guardan entre sí una razón que es el cubo de la de sus diámetros, y también que toda pirámide es la tercera parte del prisma que tiene la misma base que la pirámide e igual altura. Y que todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base que el cilindro e igual altura lo demostraron admitiendo un lema semejante al mencionado ⟨*scil.*, el principio de la exhausción⟩. Y ocurre que se da crédito a cada uno de los teoremas antedichos no menos que a los que se demuestran sin este lema. Basta, pues, con que los que publico sean llevados a un grado de credibilidad semejante».

Las demostraciones de los cuatro teoremas mencionados por Arquímedes en ese pasaje se nos han conservado en los *Elementos* de Euclides —respectivamente en XII 2, XII 18, Porisma de XII 7 y XII 10—, pero sólo XII 2 y XII 10 recurren al método de exhausción. Por otro lado, la formulación que hace Arquímedes del lema que lleva su nombre está emparentada con la definición de «magnitudes que guardan razón» que figura en *Elementos* V 4: «Se dice que guar-

dan razón entre sí las magnitudes que al multiplicarse pueden exceder una a otra», definición que suele atribuirse a Eudoxo, junto con el resto de la teoría de razones y proporciones del libro V de los *Elementos*. Si a ello unimos que Arquímedes en la carta que precede al *Método* (II 430, 2-6) atribuye expresamente a Eudoxo las demostraciones de que el cono y la pirámide son la tercera parte, respectivamente, del cilindro y el prisma que tienen su misma base y altura y dado que ésas son, precisamente las proposiciones en las que Euclides lleva a cabo la demostración sin recurrir a la exhausción, cabe concluir que el uso de este lema por Arquímedes tiene su origen en los trabajos de Eudoxo.

La originalidad de Arquímedes al emplear el método de exhausción consiste en que además de inscribir un polígono e ir duplicando el número de sus lados, también circunscribe otro cuyo número de lados también duplica, aproximándose así doblemente a la figura curvilínea de la que se ocupa hasta conseguir que el exceso en que la figura circunscrita excede a la inscrita sea menor que cualquier magnitud dada, es decir, transformando la «exhausción» en «compresión». Aun así, las expresiones empleadas por Arquímedes («se da crédito a cada uno de los teoremas antedichos no menos que a los que se demuestran sin este lema. Basta, pues, con que los que publico sean llevados a un grado de credibilidad semejante») nos hacen ver que el valor probatorio de este método seguía pareciendo insuficiente a los matemáticos griegos; Heath observa, en apoyo de esta observación filológica, que las aproximaciones conseguidas mediante la exhausción van siempre seguidas de la demostración por reducción al absurdo, pero esta opinión no es compartida por todos los expertos.

Arquímedes emplea la exhausción en *Cuadratura de la parábola* 18-24 (propiedades de las rectas trazadas en la pa-

rábola y área del segmento parabólico) y el método de compresión en la *Medida del círculo* 1 (medida del círculo), *Conoides y esferoides* 22, 26, 28 y 30 (volumen de los segmentos de paraboloide, hiperboloide y de determinados segmentos de elipsoide), *Espirales* 24 y 25 (áreas comprendidas, respectivamente, por la primera revolución de la espiral y la primera recta origen de la revolución —24— y por la segunda revolución de la espiral y la segunda recta origen de la revolución —25—), *Cuadratura de la parábola* 16 (área del segmento parabólico), *Método* 15 (volumen de la uña cilíndrica), *Sobre la esfera y el cilindro*, I 13, 14, 33, 34, 42 y 44 (superficie lateral del cilindro, superficie lateral del cono, superficie de la esfera, volumen de la esfera en relación con el cono inscrito en el hemisferio, superficie del casquete esférico, volumen del sector esférico).

Otro método más que emplearon los matemáticos griegos son las construcciones de *neûsis,* término que se podría traducir por «inclinación» o «tendencia»[47], y que consiste en trazar entre dos líneas un segmento de longitud dada —en general no de modo absoluto, sino en proporción con otro segmento conocido— de modo que pase por un punto dado. La construcción puede resolverse mediante una «cuenta de la vieja» geométrica marcando en una regla la longitud requerida y desplazando la regla hasta que los extremos del segmento marcado coincidan con las líneas previamente designadas. El recurso indicado debió de utilizarse con relativa frecuencia —desde luego, entre las soluciones que Eutocio nos transmite para el problema de la duplicación del cubo, casi la mitad se basan en estas construcciones—, y sabemos que entre las obras de Apolonio de Perga se contaba preci-

[47] Normalmente se ha vertido al latín por *inclinatio,* al inglés por *verging* o *insertion,* al alemán por *Einschiebung.*

samente una con el título *Neúseis,* dedicada a las construcciones de ese tipo que pueden resolverse como problemas planos; aunque otras han de resolverse como problemas sólidos o lineales[48].

Arquímedes hace uso de las *neúseis* en diversos pasajes, especialmente en el tratado *Sobre las líneas espirales* (Prop. 5, 6, 7, 8 y 9[49]). Concretamente en *Espirales* 5, es posible la construcción del segmento requerido mediante regla y compás, y el hecho de que Arquímedes emplee sin empacho este recurso metodológico ha llevado a pensar a algunos, entre los cuales se cuenta Dijksterhuis[50], que no es admisible el punto de vista de que la *neûsis* no era más que un sustituto para llevar a cabo la construcción en problemas en los que la solución mediante regla y compás no era posible.

En cuanto al estilo de Arquímedes, no cabe comentario literario de ninguna especie: quienes ya se hayan acercado a los textos euclídeos hallarán aquí reproducidos los rasgos de simplicidad, claridad, rigor y concisión que se encuentran allí. Estos rasgos son característicos de todos los textos griegos matemáticos de relevancia y, por tanto, no pueden ser considerados personales si comparamos los escritos de Ar-

[48] Los matemáticos griegos llamaban problemas planos a los que pueden resolverse mediante regla y compás, sólidos a los que se sirven de las secciones cónicas para su resolución y lineales a los que requieren el uso de curvas más complejas que las cónicas, del tipo de la cuadratriz, la espiral o la concoide. Entre los problemas que los griegos dieron por resueltos mediante *neûseis* «no-planas» se encuentran, por ejemplo, dos de los problemas clásicos de la matemática griega: el de hallar dos medias proporcionales entre dos magnitudes dadas —es decir, el de la duplicación del cubo— y el de la trisección del ángulo (para este último contamos con la solución de *neûsis* propuesta por Arquímedes en el *Libro de los lemas* 8).

[49] Heath comenta estas proposiciones ampliamente en *The Works of Archimedes,* págs. C-CXXII.

[50] *Op. cit.,* pág. 139.

químedes con los de Euclides o Apolonio, pero los hallamos en grado elevadísimo si los comparamos con el estilo de Eutocio, con los *Problemas* aristotélicos de carácter matemático o, simplemente, con la falta de brillantez y la abundancia de repeticiones y menudencias innecesarias de muchos de los pasajes secluidos por Heiberg.

Cuestiones terminológicas

El hecho de que la terminología matemática griega fuera fundamentalmente geométrica, mientras que la actual está impregnada de nociones algebraicas, supone cierta dificultad para quienes se acercan a cualquier texto de la matemática griega antigua. Tan evidente es el hecho, que la mayor parte de los traductores y tratadistas incluyen en sus introducciones un apartado destinado, en parte, a clarificar los nombres de los objetos matemáticos pero también, en parte, a facilitar al lector un medio de familiarizarse con las operaciones más frecuentes a lo largo de las demostraciones.

Ahora bien, si los conceptos se han hecho clásicos y las deducciones se basan en axiomas, postulados y teoremas que Euclides —en traducciones, adaptaciones, resúmenes y antologías— ha dado a conocer a toda Europa a lo largo de siglos, el razonamiento, que se atiene a la misma lógica, es, sin embargo, un razonamiento *geométrico,* no algebraico. Algunos traductores ya clásicos de Arquímedes, como Heath y Dijksterhuis, tomaron directamente el camino de verter no sólo el texto griego a sus propias lenguas, sino también transformar los cuadrados en potencias y los rectángulos en productos y dejar innominadas las operaciones realizadas con proporciones, reflejándolas mediante la simbología propia de nuestro tiempo; algo semejante hizo Heiberg en su traducción latina. Otros, sin embargo, como Ver Eecke o

Mugler y, más recientemente, Netz, han preferido respetar también en ese aspecto los originales y han procurado reflejar en lo posible el mundo mental geométrico característico de la matemática griega. También nosotros hemos optado por esta segunda posibilidad con lo que tenga de ventajoso o de su contrario. En cualquier caso, una obra del carácter de la presente no requiere una exposición exhaustiva de la terminología ni un análisis sistemático de los métodos heurísticos o probatorios, pero sí una presentación. Para desarrollos más amplios, el lector interesado puede recurrir a consultar los trabajos de Heath *(The Works of Archimedes),* I. Thomas *(Greek Mathematical Works),* los apartados correspondientes de la obra de Dijksterhuis *(Archimedes)* o, para cuestiones concretas, recurrir al *Dictionnaire de la terminologie géométrique des grecs* de Mugler. Los casos más sencillos pueden elucidarse mediante los bien conocidos diccionarios de Bailly o de Liddell-Scott-Jones. En español se puede recurrir a los volúmenes publicados (α-ἐκπελεκάω) del *Diccionario Griego-Español* de Francisco R. Adrados y a la traducción de los *Elementos* de Euclides realizada por M.ª L. Puertas para esta misma colección (B. C. G. 155, 191 y 228).

El punto *(sēmeîon)* se designa mediante una letra: «el punto Δ»; la línea *(grammḗ)* que a veces designa también a la recta *(eutheîa)* en pasajes en los que el contexto evita la ambigüedad, suele designarse mencionando los dos puntos que tiene como extremos: «la recta ΑΘ» o simplemente, «ΑΘ» en contextos suficientemente claros; a veces, para una recta dada en la construcción, se nombra la recta con una sola letra. Las rectas pueden trazarse *(ágomai, keîmai)* prolongarse *(ekbállō)* o trazarse uniendo dos puntos ya determinados *(epizeúgnymi)*. Para expresar que una recta corta a otra se usan los verbos *symbállō* o *témnō,* pero no existe un adjetivo o sustantivo que signifique «secante» (tampoco pa-

ra la secante de un círculo), sino que se emplea el participio sustantivado de *têmnō*.

Para designar de modo preciso un plano *(epípedon)* concreto suele hacerse referencia a una recta o un círculo por los que pasa y otra recta a la que es perpendicular o paralelo: «el plano que pasa por KΛ, perpendicular a AB». Éstos, y la mayor parte de los que mencionaremos a continuación, son elementos geométricos que tienen sus nombres bien testimoniados con valor terminológico desde los tratados más antiguos que se nos han conservado. Como el ángulo *(gōnía)*, que se precisa bien dando a conocer su vértice («el ángulo en K») cuando los lados de dicho ángulo son inequívocos, bien mediante tres letras que designan los extremos de las dos rectas que lo componen («el ángulo correspondiente a BAΓ»; la letra central designa el vértice). Una particularidad digna de mención es que la recta no es nunca un objeto geométrico infinito ni ilimitado, sino que tiene puntos determinados como extremos; es decir, que su uso coincide más bien con el que actualmente damos al término «segmento»; no obstante lo dicho, hemos conservado el término «recta» primero, porque ése es exactamente el concepto de «recta» en la matemática griega desde Euclides y, segundo, porque también hay segmentos circulares, esféricos, parabólicos y de otros tipos de los que Arquímedes se ocupa abundantemente, y el uso de «segmento» para designar todos esos elementos geométricos en la traducción de esas partes del texto hubiera conducido bien a una verbosidad agotadora, bien a una indeseada ausencia de claridad.

También tienen nombre la figura *(schêma)*, el polígono *(polýgōnos)*, su lado *(pleurá)*, el área *(chōríon)*, la figura sólida *(stereón)*. El nombre de la superficie *(epipháneia)*, sin embargo, se utiliza para referirse a la superficie de un sólido, pero no puede ser nunca, como en español, sinónimo de

«área». El cuadrado *(tetrágōnon)* se designa haciendo referencia al lado («el cuadrado de lado KΔ») y el rectángulo *(orthogónion)* —designado mediante un adjetivo, como en español— puede ser precisado bien refiriéndose a su diagonal —de manera que «el rectángulo AΔ» se refiere al «rectángulo de diagonal AΔ»—, bien mencionando dos de sus lados mediante tres o cuatro letras: «el rectángulo AΔE», «el rectángulo AΔ, ΔE»; en general, se omiten los nombres y se emplean expresiones preposicionales sustantivadas del tipo *tò apò KΔ* para el cuadrado, *tò hypò AΔE* para el rectángulo, que traducimos como acabamos de indicar. Los cuadrados (igual que los rectángulos, segmentos de recta, los círculos o sus segmentos, etc.) pueden sumarse —como tales figuras en sí, reuniéndolas cuando no se solapan, aunque no numéricamente—, pero no hay una palabra que designe la suma, sino que se emplea una expresión adverbializada, *hē synamphóteros,* refiriéndose a rectas, *tò synamphóteron,* para referirse a la suma de espacios planos, o *tà synamphótera,* para referirse a la suma de magnitudes, seguida de los nombres de las rectas, figuras o magnitudes en general que han de ser tomadas en conjunto como una sola; así, *hē synamphóteros EA, AZ* (abreviado a veces en *EAZ)* significa «la suma de las rectas EA, AZ»; más simplemente, la suma puede indicarse utilizando la preposición *sýn* («con») para unir los nombres de los dos planos o sólidos que han de tomarse unidos o con el indefinido *pántes* («todos») o, llegando al extremo, mediante la enumeración de los elementos que han de tomarse sumados.

El círculo *(kýklos)* se designa mediante las dos letras correspondientes a los extremos de su diámetro («el círculo BΔ»); la circunferencia *(periphéreia toû kýklou)* y el arco de circunferencia *(periphéreia)* reciben un nombre único que en general, se distingue mediante el contexto. El radio, aun-

que no tiene nombre en sentido estricto, se designa casi siempre como *hē apò toû kéntrou*. Para la tangente se emplean los participios sustantivados *hē haptoménē, hē epipsáuousa*.

Las secciones cónicas recibieron los nombres de *élleipsis, parabolḗ, hyperbolḗ,* de los que derivan los términos actuales, a partir de los trabajos de Apolonio de Perga, pero en Arquímedes se designan aún como «*he oxygōníou (orthogōníou, amblygōníou) kṓnou tomḗ*»: «la sección de un cono acutángulo (rectángulo, obtusángulo)» o, para los tratados que se nos han conservado en el dialecto dórico de Arquímedes «*ha ... tomá*». No creo que represente ninguna traición al texto de Arquímedes el verter estas expresiones —las más habituales en su tiempo— por los términos elipse, parábola, hipérbola —los más habituales en el nuestro—, y sí pienso que evitan numerosas perífrasis que sólo podrían redundar en una mayor oscuridad de los textos. El eje focal de la parábola carece de nombre y no se utiliza el concepto, en el sentido de que no hace referencia expresa a su carácter de eje de simetría: lo más próximo es el concepto de diámetro «*diámetros*», que se define —bien es verdad que en lugar anómalo, una proposición, en lugar de figurar al principio del tratado— en *Con. Esf.* 3, 246, 16-18: «Llamo diámetro en todo segmento ⟨*scil.*, de sección cónica⟩ a la recta que corta por la mitad todas las rectas trazadas paralelas a su base»; por extensión, como decimos, puede usarse también para referirse al diámetro concreto que actúa como eje de simetría. Tampoco tiene nombre la directriz ni se usa ese concepto; en cuanto al parámetro de la parábola, lo menciona siempre con la perífrasis descriptiva *par'hàn dýnantai hai apò tâs tomâs* («⟨la recta⟩ a la que aplicando las trazadas desde la sección ⟨cónica⟩ equivalen al cuadrado»), pero el manejo que hace de esa expresión deja claro que el concepto le es bien conocido, probablemente gracias a los perdidos

para nosotros *Elementos de las Cónicas* de Euclides o a los también perdidos trabajos de Menecmo sobre el mismo tema. Lo mismo sucede con la ecuación fundamental de la parábola, que le es bien conocida a juzgar por la frecuencia con que la emplea en sus razonamientos; para la hipérbola no considera más que una rama, en la que reconoce la existencia de diámetros —en el mismo sentido que en el caso de la parábola—; las asíntotas reciben el nombre de *hai éngista eutheîai* («las rectas ⟨que llegan⟩ cerquisima»).

En cuanto a los sólidos originados en las secciones cónicas, Arquímedes les dedica el tratado *Sobre conoides y esferoides,* y explica su terminología en la carta dedicatoria, en lo que podemos resumir diciendo que llama *(sphairoeidés)* al sólido generado por la elipse —dentro de los elipsoides distingue entre el «alargado» *(paramâkes)* y el «achatado» *(epiplatés),* dependiendo de la posición vertical u horizontal del eje mayor— y conoides *(kōnoeidés)* a los generados por la parábola y la hipérbola. Distingue entre éstos últimos llamando *orthogṓnion kōnoeidés* al paraboloide de revolución y *amblygṓnion kōnoeidés* al hiperboloide de revolución. También para estos sólidos optamos por usar los nombres actuales por las razones ya expuestas. Sólo en el título de la obra, por respeto a la tradición, y en algún caso inequívoco en que Arquímedes usa «conoides» para designar simultáneamente al paraboloide y al hiperboloide de revolución hemos mantenido esos vocablos, aun sabiendo que el significado que atribuye el *DRAE* a ambos términos difiere del sentido dado por Arquímedes. El diámetro de la parábola, la hipérbola o la elipse sobre el que gira la curva para generar los sólidos de revolución recibe el nombre de *áxōn,* eje[51].

---

[51] Ya hemos indicado que la terminología empleada por Arquímedes no coincide con la posterior ni con la nuestra. En español, llamamos «diámetro» en estas curvas a las «rectas que dividen por la mitad a una deter-

En el caso del hiperboloide se considera también el cono comprendido por las asíntotas, al que se da el nombre de «el que contiene al hiperboloide», «*ho periéchōn tò kōnoeidés*», y en ese cono, la recta que va del vértice de la hipérbola generadora del hiperboloide hasta el punto de corte de sus asíntotas[52] recibe el nombre de *hē potéousa tôi áxoni* («la añadida al eje»).

El cilindro, el cono, la esfera *(kýlindros, kônos, sphaîra)* pueden designarse de modos diversos: mediante una sola letra («el cono A»), pero también haciendo referencia a su base *(básis)* «el cono con base en BΔ», o añadiendo el dato de su altura *(áxōn)* para distinguirlo de otra figura del mismo tipo y con la misma base. Los nombres del sector —circular o esférico— *(tomeús)* y del segmento —circular o esférico— *(tmêma)* en el sentido, este último, de parte de una figura cortada por rectas o por superficies pertenecen a la terminología usual y no presentan especiales particularidades, salvo, quizá, que el castellano prefiere «casquete» para referirse al segmento esférico.

En cuanto a los numerales, la inexistencia en Grecia de signos de valor unívoco para designar los números se solventó utilizando a tal fin las letras bajo un trazo horizontal

---

minada familia de cuerdas»; en la elipse, dos de esos diámetros, el mayor y el menor, reciben los nombres de «ejes»; en la parábola y la hipérbola, uno de los diámetros —el que es eje de simetría—, recibe el nombre de «eje». Mantener en la traducción la transcripción del término usado por Arquímedes hubiera sido fuente de malas interpretaciones, por lo cual he preferido aquí, como en otros casos semejantes, emplear la terminología habitual entre nosotros, la acuñada por Apolonio de Perga.

[52] En el caso de la hipérbola tal y como la plantea Apolonio, esa recta sería el semieje: renuncio a tal traducción porque Arquímedes emplea el término para referirse a elementos del hiperboloide, no de la hipérbola, y porque supone la consideración de la hipérbola de doble rama, lo que no entra en el pensamiento arquimedeo.

y ésa es la forma bajo la cual los encontramos en los manuscritos de Arquímedes. Como es sabido, no había signo para el cero ni concepto de decimales; en su lugar se empleaban las fracciones, preferentemente bajo la forma 1/x, que se representaban mediante la letra correspondiente al denominador seguida de tilde en el ángulo superior derecho[53]. La notación era sólo parcialmente posicional y las operaciones aritméticas eran tan engorrosas como uno puede imaginar: los ejemplos pueden verse en el *Comentario* de Eutocio a la prop. 3 de la *Medida del círculo*. El cálculo aritmético, en todo caso, estaba vetado en los desarrollos geométricos —suele subrayarse este punto recordando que en los *Elementos* de Euclides no hay más números que los que indican el orden de las proposiciones— y Arquímedes actúa del mismo modo. Sólo se hace un uso amplio de los números propiamente dichos en las Proposiciones 2 y 3 de la *Medida del círculo,* al efecto de calcular la aproximación al valor de π, y en el *Arenario*. Hemos vertido los numerales por los guarismos correspondientes, y los interesados en la cuestión pueden recurrir a una buena gramática para lo fundamental o, para tratamientos más en detalle, a las exposiciones de Heath o Loria o al *Oxford Classical Dictionary* (art. «numbers», con bibliografía).

La teoría de proporciones

Pero si no usaban los números y no había un método algebraico, ¿cómo comparaban las áreas o volúmenes que estudiaban? La respuesta a esta dificultad viene dada por el uso de las proporciones. La teoría de proporciones que en-

---

[53] Ej.: δ′ = 1/4; ιε′ = 1/15.

contramos expuesta en el Libro V de los *Elementos*[54] y cuya creación suele atribuirse a Eudoxo fue un arma potentísima para el desarrollo de la geometría griega. Arquímedes hace uso de ella casi constantemente y con tal flexibilidad que no escasa parte del *Comentario* de Eutocio está dedicado a detallar los pasos de las operaciones realizadas con las proporciones, de manera que también en esto es necesario hacer una presentación previa, y ninguna mejor que las referencias precisas que se nos ofrecen en el Libro V de los *Elementos* de Euclides. Allí, tras definir la razón *(lógos)* como «cierta relación en cuanto al tamaño de magnitudes homogéneas» *(Elem.* V, def. 3) y la proporción afirmando que «Se dice que están en proporción *(análogon)* las magnitudes que tomadas de dos en dos guardan la misma razón» *(Elem.* V, def. 5), se demuestra cuáles son las principales propiedades de las proporciones, que enumeramos a continuación.

Decimos que una proporción se toma en alternancia *(enalláx)* cuando tomamos la razón del antecedente al antecedente y del consecuente al consecuente (Def. 12). La propiedad fundamental de esta operación consiste en que la proporcionalidad se mantiene (Prop. 16). Es decir, que si $a:b :: c:d$, tomando la proporción en alternancia tendremos que $a:c :: b:d$.

Una razón se invierte o se toma invertida *(anápalin)* cuando tomamos el antecedente como consecuente y el consecuente como antecedente (Def. 13); y las magnitudes que

[54] Citaremos con frecuencia los *Elementos* de Euclides a lo largo tanto de esta Introducción como en las notas. En general, la traducción de los pasajes que cito —tanto de Euclides como de las demás fuentes que menciono en esta Introducción— es obra mía, pero para Euclides el lector interesado puede recurrir a la traducción de M.ª L. Puertas (primera versión española completa) publicada en esta misma colección (B. C. G., vols. 155, 191 y 228.

son proporcionales conservan la proporcionalidad cuando se toma la proporción invertida (Prop. 7, corol.). Si tenemos *a:b :: c:d*, por inversión *b:a :: d:c*.

La composición *(sýnthesis)* de una razón consiste en tomar la suma del antecedente más el consecuente como una sola magnitud respecto al consecuente (Def. 14) y la descomposición *(diaíresis)* consiste en tomar la diferencia del antecedente menos el consecuente en relación con el consecuente (Def. 15). Es decir, que si tenemos una razón *a:b*, la composición de la misma sería *a+b:b*, y la descomposición de esa misma razón sería *a-b:b*. Cuando determinadas magnitudes son proporcionales en composición, lo son también al descomponerlas (Prop. 17) y, viceversa, si determinadas magnitudes son proporcionales descompuestas, también lo serán por composición (Prop. 18): si *a+b:b :: c+d:d,* entonces *a:b :: c:d* y viceversa.

La conversión *(anastrophḗ)* de una razón consiste en tomar el antecedente en relación a la diferencia del antecedente menos el consecuente; y si determinadas magnitudes son proporcionales en composición, también tras la conversión serán proporcionales (Prop. 19, corol.): si *a:b,* la conversión de esa razón nos daría otra razón *a:a-b*. Y si *a+b:b :: c+d:d*, por conversión tendremos que *a+b:a :: c+d:c*.

La razón *ex aequali (di'ísou)* la define Euclides (Def. 17) diciendo que si hay una serie de magnitudes y otra serie en igual número que las primeras, tomadas de dos en dos y en la misma razón, se produce una proporción *ex aequali* cuando en la primera serie la primera es a la última como en la segunda serie la primera a la última. Dicho de otra manera, también recogida por Euclides, consiste en tomar los extremos con omisión de los medios. Es decir, que si teniendo dos series de magnitudes, ambas con igual número de elementos *a, b, c, d, e, f... j, k* y *A, B, C, D, E, F... J, K*, y se

cumple que *a:b :: A:B, b:c :: B:C, c:d :: C:D... j:k :: J:K*, entonces, *a:k :: A:K*. Esta definición, que se aplica en las proposiciones 20 y 21 referida a la proporción alterada —de la que hablaremos a continuación— es al mismo tiempo el enunciado de una propiedad que, necesariamente, hay que demostrar (Prop. 22).

La proporción alterada *(tetaragménē*[55]*)* se produce cuando entre tres magnitudes y otras tantas en el mismo número que ellas se da que el antecedente es al consecuente entre las primeras como el consecuente al antecedente en las segundas, y que el antecedente es a otra magnitud en las primeras como otra magnitud al consecuente en las últimas (Def. 18). Si tenemos *a, b, c* y *A, B, C*, y se da que *a:b :: B:C* y *b:c :: A:B*, las dos series de magnitudes están en proporción alterada.

Cuando tres magnitudes están en proporción continua *(synechḗs analogía)*, es decir, que *a:b :: b:c*, se dice que la segunda magnitud es media proporcional de las otras dos; la propiedad fundamental de esta clase de proporciones consiste en que la primera magnitud guarda con la tercera una razón que es la del cuadrado de la primera con el cuadrado de la segunda *(diplasíōn lógos)* (Def. 9); es decir, que si *a:b :: b:c*, entonces $a:c :: a^2:b^2$. Asimismo, cuando cuatro magnitudes están en proporción continua, *a:b :: b:c :: c:d*, la primera guarda con la cuarta una razón que igual a la del cubo de la primera con la del cubo de la segunda, es decir, que $a:d :: a^3:b^3$ *(triplasíōn lógos)*.

Una operación más que Arquímedes emplea frecuentemente en sus razonamientos es la composición de razones

---

[55] Así denominada por Euclides; Arquímedes prefiere la expresión *anomoíōs tetagménōn tôn lógōn*.

(synkeímenos lógos); su equivalente algebraico es el producto de razones.

La tradición manuscrita: el texto y las ilustraciones

La historia de la transmisión de los textos griegos está plagada de pérdidas, desapariciones, reapariciones y reconocimientos, y tiene un punto de peripecia que recuerda la trama de las novelas helenísticas. El caso de Arquímedes no es excepción. El grueso de la investigación sobre este tema fue llevado a cabo por Heiberg[56], y su trabajo ha sido la principal fuente de datos para los tratadistas posteriores como lo es en buena medida para nosotros, ya que nadie más ha emprendido hasta ahora un estudio tan profundo y riguroso de la tradición manuscrita de las obras de Arquímedes con la salvedad, en todo caso, de los estudios de M. Clagett sobre el Arquímedes latino[57] y la nueva edición —en preparación— del palimpsesto de Jerusalén.

Los hechos acontecidos durante el período oscuro de la transmisión —desde el momento en que Arquímedes compuso y publicó los tratados hasta la fecha del *Comentario* de Eutocio, a principios del siglo VI— podemos reconstruirlos sólo mediante hipótesis y vendrían a indicarnos, en resumen, que las obras debieron de difundirse separadamente —es decir, sin formar un corpus— y con diversa fortuna según el interés que cada una suscitó: fue probablemente en este período cuando se produjo la pérdida del escrito sobre los poliedros semirregulares mencionado por Papo y, también probablemente, la de la selección de las proposiciones

[56] Puede consultarse en los *Prolegomena* de su edición (vol. III, págs. III-XCVIII).

[57] Especialmente *Archimedes in the Middle Ages.* I: *The arabo-latin tradition,* Madison, 1964.

que se nos conservan del tratado de la *Medida del círculo,* tratado que Eutocio conoció en la misma forma incompleta que nosotros.

Las copias de los trabajos de Arquímedes no debían de ser moneda corriente, según nos lo indican varios datos: uno, que Diocles, al que se data en torno a 190-180 a. C., ya no llega a encontrar la prueba que Arquímedes afirma haber redactado en un lema a *Sobre la esfera y el cilindro* II 4, y por ello lleva a cabo su propio intento de demostración; el segundo, que cuando Eutocio, en el siglo VI d. C., se propone elaborar su *Comentario* ya no pudo encontrar ejemplares ni siquiera de todas las obras significativas: la *Cuadratura de la parábola* la conoce nada más de título, las *Espirales* sólo por una referencia imprecisa, y para encontrar el lema que acabamos de mencionar a *Sobre la esfera y el cilindro* II 4 tiene que andar rebuscando entre libros antiguos medio borrosos; además, los árabes, que conocieron y utilizaron ampliamente las obras de Arquímedes, no llegaron nunca a disponer de ningún manuscrito tan completo como los que nos han llegado por la tradición griega.

En la época de Eutocio y tal vez por obra del mismo círculo en que éste se movía pudo ser cuando los tratados de más éxito —*Sobre la esfera y el cilindro,* la *Medida del círculo* y el *Equilibrio de las figuras planas*— se virtieron de su dialecto dorio original a la *koinḗ diálektos,* el «dialecto común» utilizado habitualmente en la expresión literaria. Así lo suponen expertos como Heath y Bulmer-Thomas[58], y el hecho de que los tratados «traducidos» sean precisamente los que Eutocio comentó obra como argumento a favor de esta suposición. Las indicaciones de copista, que figuran res-

[58] Respectivamente en *A history of Greek Mathematics* (vol. II, pág. 25) y en el art. «Eutocius» (en CH. C. GILLISPIE, *Dictionnary of Scientific Biography,* Nueva York, 1970).

pectivamente al final del *Comentario* de Eutocio al libro I de la *Esfera y el cilindro,* al final de su *Comentario* al libro II de la misma obra y al final del *Comentario* a la *Medida del círculo* aseguran que la edición de esos trabajos fue revisada por Isidoro de Mileto, lo que algunos han tomado por indicio de que Isidoro de Mileto debió de ser el impulsor, si no el autor, de una recopilación de las más antiguas —si no la primera— de las obras de Arquímedes; bien pudo ser así, como empuja a pensarlo el hecho de que se sumen las evidencias de interés por las obras de Arquímedes, pero la verdad es que no hay pruebas suficiente para afirmarlo sin lugar a dudas. En todo caso, si tal edición se llevó a cabo, hemos de pensar que era menos completa que la que nos ha llegado, y que en esa edición debían de faltar, al menos, los tratados sobre *Espirales* y *Cuadratura de la parábola* que Eutocio hace ver que no conoció.

Aunque la evidencia sea insuficiente para admitir la confección de una recopilación de las obras de Arquímedes, si reunimos los datos dispersos con que contamos para ese período —la primera mitad del siglo VI— sí parece que por entonces un grupo de matemáticos e ingenieros, próximos a los arquitectos de Santa Sofía de Constantinopla, se interesaron de modo muy especial en las obras de Arquímedes. El interés por ellas se pone de manifiesto por la propia redacción del *Comentario* de Eutocio y por el hecho de que Antemio de Trales incluyera el estudio sobre los espejos ustorios en su obra *Perì paradóxōn mēchanēmátōn* (= *Sobre artilugios extraordinarios).* Las relaciones entre estos personajes se deducen del hecho de que Eutocio hiciera a Antemio receptor de la dedicatoria de su *Comentario* a las *Cónicas* de Apolonio, y de que se atribuya a Isidoro de Mileto la edición de los *Comentarios* de Eutocio a los libros *Sobre la esfera y el cilindro* y a la *Medida del círculo.* Las mismas

glosas que atribuyen a Isidoro de Mileto esa edición indican que la copia del manuscrito la llevó a cabo un discípulo de Isidoro, al que llama «nuestro maestro».

El «período oscuro» llegaría a su fin en el siglo IX. Es la época de Focio y de la transliteración, los tiempos en que los antiguos manuscritos en forma de volumen y escritos en uncial —la letra mayúscula utilizada desde el siglo IV a. C. tanto en epígrafes como sobre papiro o pergamino— fueron copiados de nuevo, pero ahora en cursiva minúscula y en forma de libro. En el año 863 el emperador Bardas refundó la escuela imperial de Constantinopla y encargó la dirección de la misma a León el Filósofo[59]. Una dedicatoria de manuscrito en un colofón de copista al final de la *Cuadratura de la parábola*[60] hace pensar en algún género de participación de este personaje en la elaboración del mismo: «Feliz seas, León Geómetra: que vivas muchos años, muy amado de las Musas»; de ahí que se le atribuya la preparación o, al menos, el impulso de la «edición» modelo de las obras de Arquímedes. Los manuscritos así confeccionados debían de ser más completos que los conocidos y preparados en el siglo VI, como se deduce del hecho de que el mencionado colofón se encuentre al final de la *Cuadratura de la parábola,* que Eutocio no conocía.

Aunque los manuscritos que resultaron de esos trabajos filológicos no han llegado, en sentido estricto, hasta nuestro tiempo, son el origen de la tradición manuscrita en que se basan las ediciones actuales. Circularon al menos tres modelos diferentes de esas supuestas ediciones, tres tipos de ma-

---

[59] Erudito del primer renacimiento bizantino (790-869), buen conocedor de la cultura griega, especialmente de la ciencia y las matemáticas, y maestro de Cirilo, apóstol de los eslavos.

[60] Conservada sólo en el ms. D y recogida por HEIBERG en el aparato crítico (II 315).

nuscritos, de los cuales el primero y más famoso es sin duda el palimpsesto de Jerusalén dado a conocer por Heiberg en 1906[61]. El manuscrito, que aparentemente conservaba textos religiosos —en concreto un eucologio—, presentaba muestras de haber contenido en fecha más antigua otro texto, de carácter matemático, que había sido borrado para reutilizar el pergamino que servía como soporte escriptorio. Heiberg comprobó que la escritura primera (minúscula del siglo x) correspondía a obras de Arquímedes. Allí, junto con obras conocidas por otros manuscritos —*Equilibrio de las figuras planas* II, *Sobre las espirales*, *Sobre la esfera y el cilindro, Medida del círculo*—, estaban los dos libros *Sobre los cuerpos flotantes,* el *Método* y un fragmento del *Stomachion,* para cuyo texto griego es fuente única.

El manuscrito, tras desaparecer en la Primera Guerra Mundial, reapareció en una colección privada francesa. Los nuevos propietarios intentaron venderlo a la Bibliothèque Nationale de París y a la British Library londinense sin llegar finalmente a ningún acuerdo, tras lo cual, en 1998, salió a subasta en Nueva York en la casa Christie's al atractivo precio de dos millones de dólares. Adquirido entonces por un comprador anónimo, se cuenta actualmente entre los fondos del Walters Art Museum de Baltimore. N. G. Wilson, el famoso experto en historia y crítica de los textos, encargado por la casa Christie's de redactar lo relativo al palimpsesto para el catálogo de la subasta, ha publicado recientemente

[61] *Codex rescriptus Metochii Constantinopolitani Sancti Sepulchri monasterii Hierosolymitani 355*, en cuarto, del siglo x, siglado C. Contiene fragmentos de *Sobre la esfera y el cilindro, Sobre las líneas espirales, Medida del círculo, Equilibrio de las figuras planas, Stomachion,* la mayor parte de *Sobre los cuerpos flotantes* y el *Método*. Heiberg dio cuenta de los detalles de la recuperación del manuscrito y su lectura en «Eine neue Archimedesschrift» *Hermes* 42 (1907), págs. 235 y ss.

un artículo[62] en el que amplía las noticias ofrecidas por Heiberg. Aparte de una serie de precisiones de carácter paleográfico y codicológico, nos informa del deterioro sufrido por el manuscrito en el siglo escaso transcurrido desde que Heiberg lo dio a conocer: muchas hojas se han visto afectadas por hongos, que han dejado marcas en el pergamino, por lo cual partes del texto que Heiberg pudo leer a simple vista con ayuda de la lupa hoy son difícilmente legibles sin ayuda de la moderna tecnología —para algunas bastaría con la lámpara ultravioleta, pero ciertos pasajes, afectados por las manchas de hongos, sólo son recuperables con las técnicas digitales—. Además, cuatro hojas en las que Heiberg pudo leer texto de Arquímedes presentan hoy ilustraciones con retratos a toda página que pueden pretender representar a los cuatro evangelistas: los colores empleados resultan sumamente modernos; ni Papadopoulos-Kerameus, el primero en catalogar el manuscrito, ni Heiberg, primero en publicar su contenido, hacen referencia a esas cuatro hojas iluminadas. Wilson deduce que las iluminaciones son «el resultado de un intento desastrosamente equivocado de embellecer el manuscrito, presumiblemente para aumentar su valor a los ojos de un posible comprador», acción que califica de «vandalismo para el que no es fácil encontrar paralelos». Por cierto que otros vandalismos semejantes se habían producido ya a mediados del siglo XIX y por obra de una persona de cuya formación uno hubiera esperado más respeto a libros y bibliotecas: fue el erudito alemán Tischendorf quien mencionó por primera vez el palimpsesto en un libro de viajes[63], al relatar que en Constantinopla había visitado la biblioteca del Patriarcado sin hallar nada de interés «aparte de un palimp-

[62] «Archimedes: The Palimpsest and the Tradition», *Byzantinische Zeitschrift* 92 (1999), 89-101.

[63] *Reise in den Orient*, Leipzig, 1846.

sesto que trata de matemáticas». Parece que, además de verlo, lo mutiló llevándose consigo una hoja al salir de la Biblioteca, puesto que en 1876 sus albaceas vendieron dicha hoja a la Biblioteca de la Universidad de Cambridge, donde se conserva hoy como Ms. Add. 1879.23[64].

Los otros dos manuscritos desaparecidos en que se funda la tradición son los que Heiberg sigla, respectivamente, A y 𝔅, dos códices llegados a Occidente a través de Sicilia. El primero de ellos era un códice que perteneció a Giorgio Valla[65] y que contenía *Sobre la esfera y el cilindro, Medida del círculo, Sobre los conoides y esferoides, Sobre las espirales, Sobre el equilibrio de las figuras planas, Arenario, Cuadratura de la parábola,* los *Comentarios* de Eutocio y el tratado *Sobre las medidas* de Herón[66]. El manuscrito fue comprado a la muerte de Valla en 1499 por Alberto Pio, príncipe de Carpi y de él lo heredó su sobrino, Rodolfo Pio, en 1550. El inventario de la biblioteca de éste último, realizado a su muerte en 1564, no recoge la existencia de ningún libro de Arquímedes, y ahí se pierde la pista. Pero antes de desaparecer, el manuscrito había servido de modelo directo para, al menos, cuatro copias, una conservada en Florencia,

[64] La hoja, a la que le falta la mitad, conserva en estado lacunoso *Sobre la esfera y el cilindro* I 35-37.

[65] Sobrino del —más conocido— humanista Lorenzo Valla, enseñó en Venecia de 1486 a 1499. En su correspondencia manifiesta repetidamente la intención de traducir los textos de Arquímedes, pero lo único que llegó a publicar fueron traducciones latinas parciales del manuscrito entonces en su posesión en su *De expetendis et fugiendis rebus,* en donde se puede ver, como ha hecho notar Clagett *(op. cit.,* vol III, parte 3, págs. 461-469), que no sólo conocía la obra de Arquímedes, sino también el *Comentario a la «Física» de Aristóteles* de SIMPLICIO.

[66] Es decir, de las obras que hoy conocemos no contenía el tratado *Sobre cuerpos flotantes,* el *Método,* el *Stomachion* y el *Problema de los bueyes.*

en la Biblioteca Laurenciana, dos que guarda hoy la Bibliothèque Nationale de París, y la cuarta en la Biblioteca Marciana de Venecia[67]. Esos manuscritos son los testimonios más fidedignos de la tradición manuscrita en griego, en opinión de Heiberg, hasta que vino a unírseles el palimpsesto de Jerusalén. Si el Laurenciano es el códice más respetuoso, pues conserva errores que se detectan también en las lecturas de Valla, el Parisino 2360 (G) es el que nos ofrece los datos más completos sobre el manuscrito desaparecido, pues en uno de sus márgenes (fol. 120) podemos leer: «Esta copia se realizó a partir del modelo aquel antiquísimo que fue primero propiedad de Giorgio Valla y que perteneció después al distinguidísimo príncipe Alberto Pio de Carpi. El cual modelo —antiquísimo, como hemos dicho— tenía grandísima e inmensa falta de claridad por causa de los fallos, de modo que en innúmeros lugares no cabía en modo alguno leer con certeza. En cuanto a las ilustraciones, habiendo muchos y variados errores, las confusiones eran muy abundantes; quiero decir: unas letras por otras, χ en vez de κ y al revés; α en vez de λ y al revés; ζ en vez de ξ y al revés[68]. Había además en el modelo ciertos signos particulares de abreviatura...». Los cuatro manuscritos que evidencian ser copia directa del de Giorgio Valla son los que han servido de modelo para el resto de las copias existentes, cuyo catálogo puede consultarse en los *Prolegomena* de Heiberg.

---

[67] Los manuscritos indicados son, respectivamente, el *Laurentianus XXVIII, 4,* del siglo XV (D); *Parisinus 2361,* del año 1544 (H); *Parisinus 2360, olim Mediceus*, del siglo XVI (G) y *Marcianus 305*, del siglo XV (E).

[68] Al mencionar estos errores, el bibliotecario o copista que lo escribe se refiere a las letras de las ilustraciones, en uncial, pues los errores que señala se refieren forzosamente a mayúsculas unciales. En lo que sigue, por el contrario, se refiere al texto propiamente dicho, pues las abreviaturas que menciona sólo son posibles en la minúscula cursiva.

Antes de toda esta peripecia humanística, en 1269 y en la corte papal de Viterbo, este mismo códice A había servido de original para la traducción latina que llevó a cabo el dominico Guillermo de Moerbeke[69], cuyo original se conserva en la Biblioteca Vaticana[70]. La traducción de Moerbeke es sumamente valiosa porque, además de haber sido realizada sobre texto griego, es cuidada y comprensible, a pesar de la dificultad añadida que suponía ocuparse de temas como las espirales o los conoides y esferoides para los que no había ninguna tradición latina previa. Heiberg dice de ella: «Guillermo, según su costumbre, sigue tan de cerca los vocablos griegos uno a uno, que su versión puede ser tratada al comparar ⟨*scil.*, «los manuscritos»⟩ como si fuera un códice griego». De acuerdo con eso, Heiberg lo emplea abundantemente a la hora de fijar su edición; pero el interés de esta versión latina no sólo radica en ello, sino también en que ofrece el texto del tratado *Sobre los cuerpos flotantes*, que no aparece en A. De ahí que se restituya la existencia, en Viterbo y en 1269, del otro manuscrito griego perdido al que hacíamos referencia, el que Heiberg sigla 𝔅, del cual no tenemos ninguna otra noticia directa ni indirecta más que la

[69] La dependencia existente entre esta traducción latina y el desaparecido manuscrito A viene confirmada por la laguna común reseñada por Moerbeke y por el copista del Parisino 2360. El dominico flamenco Guillermo de Moerbeke (Moerbeke, c. 1215- Corinto, c.1286) desempeñó un importante papel en la divulgación en Occidente de los textos griegos mediante las versiones latinas de los mismos que llevó a cabo entre 1260 y 1278. Tradujo buen número de obras filosóficas —Aristóteles y sus comentadores antiguos, escritos de los neoplatónicos— y también textos científicos entre los que se cuentan obras de Ptolomeo e Hipócrates además de los escritos de Arquímedes referidos.

[70] *Ottobonianus Latinus 850*, siglado B. Por cierto que también la Biblioteca Nacional de Madrid guarda un ejemplar de esta traducción (BN 9119), que Clagett considera «un manuscrito mal hecho, de origen italiano, de principios del siglo xv».

contaminación reseñada en la versión de Guillermo de Moerbeke.

Y es que las versiones latinas —y no sólo la de Moerbeke— han desempeñado un papel nada despreciable en la transmisión y difusión de las obras de Arquímedes. Nuestro conocimiento sobre ese punto depende en buena medida de los estudios de Clagett sobre Arquímedes en la Edad Media. Según este autor, la *Medida del círculo* fue vertida al menos dos veces al latín en el siglo XII: si la primera de esas versiones —que él atribuye a Platón de Tívoli— no es de gran calidad ni aporta datos de especial relevancia, la segunda, sin embargo, mucho más cuidadosa, realizada en Toledo por Gerardo de Cremona[71] (1144-1187) a partir de una versión árabe, presenta el interés de que conserva un corolario sobre el área del sector circular en función de la longitud del arco del sector y el radio, demostración que Herón atribuye específicamente a Arquímedes. Este dato, además de corroborar la tesis de que la versión que poseemos de la *Medida del círculo* es incompleta, nos hace ver que junto a los tres tipos de manuscritos griegos reseñados —obras escriptorias de importancia, como corresponde a la calidad del autor y al interés y dificultad de los textos— corrieron también seguramente copias de menor calidad y menos pretensiones, probablemente para uso de docentes y discentes, que contenían sólo una o algunas de las obras más solicitadas.

Volviendo a los manuscritos en los que se basa la tradición que ha llegado a cristalizar en la imprenta, una segunda traducción latina de A digna de referencia es la llevada a cabo por Jacobo de Cremona en 1450 por orden del papa

---

[71] La traducción de Gerardo de Cremona quedó incluida en un hermoso códice de la Biblioteca Nacional de París (Fondo Latino 9335) en donde figura junto a otras traducciones del mismo autor.

Nicolás V, de cuyo interés haremos mención más adelante, al ocuparnos de las obras impresas.

En cuanto a las ilustraciones, hemos de decir en primer lugar que los filólogos, en general, han mostrado muy escaso interés por ellas hasta ahora. No es raro que se editen en lenguas modernas versiones de los clásicos amputadas de las ilustraciones que sí figuran en todos los manuscritos, ni es excepcional que tal caso se produzca en ediciones del texto griego. Las introducciones no suelen señalar la procedencia precisa de las figuras, porque frecuentemente las ilustraciones que salen de la imprenta no son sino refecciones más o menos precisas, inspiradas en alguno de los manuscritos o en el conjunto de ellos.

Que los antiguos matemáticos griegos utilizaban diagramas lo evidencia, sin ir más lejos, la anécdota plutarquiana que relata la muerte de Arquímedes y, remontándonos aún más atrás, contamos con testimonios que señalan a Hipócrates de Quíos como el autor de la convención de servirse de letras para designar los puntos oportunos en los dibujos. Sin duda esa tradición ha contribuido a que la mayor parte de los manuscritos de tema matemático conserven sus ilustraciones —como regla general podemos decir que sólo faltan las ilustraciones en los manuscritos inacabados, pues, en general, los copistas iban por delante escribiendo el texto y dejando espacio para las figuras, que se añadían una vez concluida la copia—. En lo que se refiere a Arquímedes, R. Netz ha elaborado lo que pretende ser la primera edición crítica de las figuras: el resultado de sus estudios hace ver que los manuscritos derivados de A (el códice desaparecido que perteneció a G. Valla) coinciden en la forma y disposición de las ilustraciones —incluso en lo que se refiere al lugar que ocupan dentro del teorema, siempre siguiendo inmediatamente a la descripción de la construcción—, lo que

permite suponer que copian fielmente el modelo común. A la vez, ciertas figuras conservadas en C (el palimpsesto) —las correspondientes a *Sobre la esfera y el cilindro* I 32 a II 6— coinciden con las que se pueden reconstruir para A de modo tan próximo que parece evidente un origen común para ambos manuscritos bizantinos, aunque no podemos dar razón de la fecha de origen del prototipo. El manuscrito B, que contiene la traducción latina de Moerbeke, no es de utilidad para esta reconstrucción, pues Moerbeke cambió de lugar las figuras transfiriéndolas a los márgenes, y ésa debió ser la razón de que las ilustraciones de su manuscrito presenten proporciones diferentes de las de A y C; además, a mediados del siglo XV el humanista Coner estudió el manuscrito y se permitió raspar algunas de las ilustraciones y sustituirlas por otras que, a su entender, eran más correctas. Con su edición crítica de las ilustraciones —ése es el nombre que él da a su trabajo— Netz pretende «reconstruir a partir de la evidencia de los manuscritos la forma más antigua recuperable de los diagramas», con lo cual su juicio respecto a la 'corrección' se ajusta a los criterios antiguos, que a su entender pretenden «ofrecer una representación esquemática del modelo de configuración contenido en el caso geométrico estudiado»; esa representación esquemática «se usa como parte de la lógica del argumento» y «es independiente de los valores métricos» —en el sentido de que dos rectas o dos círculos que en la construcción se describen como iguales pueden ser en la ilustración uno mayor que otro o viceversa, o que elementos descritos en la construcción como desiguales pueden aparecer como iguales en el diagrama—, o de que lo que en la construcción se describe como una «cuerda» puede aparecer en el dibujo como un diámetro, sin que eso deba afectar a la lógica de la demostración. En el caso de errores manifiestos de los escribas, concretamente en la asignación

de letras en la figura, Netz lleva a cabo la corrección y la hace notar en el aparato crítico que adjunta a cada ilustración.

La comparación entre los diagramas recogidos por Netz y Heiberg permite ver que éste último, respetando en lo fundamental el número y clase de figuras y la disposición general de las mismas, corrigió tamaños, sustituyó curvas del original por rectas, añadió y quitó letras y rectas, y, en general, alteró las figuras en el sentido que le pareció más oportuno tendiendo a ofrecer lo que a los ojos del lector de su tiempo podía ser más «correcto» de acuerdo con los usos generales de las ilustraciones matemáticas de su época.

Principales ediciones y traducciones

La primera edición de conjunto del texto griego de las obras de Arquímedes fue publicada en Basilea en 1544 por Johann Gechauff Venatorius, impresa por Hervagius, y contenía todas las obras conocidas por entonces del gran matemático[72]. Iba acompañada de una versión latina, basada en la ya mencionada de Jacobo de Cremona, pues Regiomontano[73] había copiado de su propia mano este manuscrito, lo

[72] No obstante, ésa no fue la primera vez que la obra de Arquímedes alcanzó la imprenta, pues en 1503 había aparecido en Venecia una versión latina de la *Medida del círculo* publicada por el matemático napolitano Luca Gaurico (el incunable y raro *Tetragonismus id est circuli quadratura per Campanum, Archimedem Syracusanum atque Boetium mathematicae perspicacissimos adinventa*) y en 1543 aparecería, también en Venecia, una copia literal de esa obra junto con la versión latina del tratado del *Equilibrio de las figuras planas* y el Libro I de *Sobre los cuerpos flotantes* a cargo de Nicola Tartaglia.

[73] Johann Müller (Königsberg, 1436-Roma, 1476), astrónomo y matemático al que debemos, además del *Epitome* del Almagesto de Ptolomeo, los *Cinco libros sobre los triángulos de todas clases* (escrito en 1464

contrastó con el texto griego de E, fuente de las correcciones y anotaciones marginales que presenta, y llevó su copia a Alemania en 1468 (el original del trabajo de Regiomontano se conserva hoy en Nuremberg[74]).

Las ediciones que aparecieron posteriormente no sólo fijaron el texto, sino que además lo fueron corrigiendo poco a poco mediante la colación de manuscritos no tenidos en cuenta previamente, y a ello colaboraron también los traductores de Arquímedes a las lenguas modernas, detectando errores y proponiendo conjeturas que venían a aclarar pasajes corruptos. Continuaba, entretanto, la labor erudita de investigación textual, y el siglo XVIII vio el descubrimiento de un texto de Arquímedes dado por desaparecido: el *Problema de los bueyes,* recuperado y dado a conocer por Lessing en 1773[75].

Se consideran trabajos clásicos la traducción latina de Comandino (Venecia 1548)[76]; la edición de Rivault (París 1615) —con los enunciados de las proposiciones en griego y las demostraciones en latín algo retocadas, realizada sobre la edición de Basilea y que sirvió de base a la primera traducción a una lengua moderna, la alemana de Sturm (Nuremberg, 1670)—; la bilingüe grecolatina de Torelli (Oxford 1792), así como la traducción alemana de Nizze (Stralsund, 1824) y la francesa de Peyrard (París, 1807).

---

y publicado en 1533), primera exposición moderna de la trigonometría plana y esférica.

[74] *Norimbergense cent. V 15.*

[75] En *Beiträge zur Geschichte und Litteratur,* Braunschweig, 1773, págs. 421 y ss.

[76] Otra versión latina, la de Francesco Maurolico (1570) tuvo la mala fortuna de que la mayor parte de los ejemplares desaparecieran en un naufragio; se reimprimió en Palermo en 1685.

Todas esas ediciones y traducciones se vieron ampliamente superadas por la de Heiberg, quien, tras colacionar más de una docena de manuscritos griegos, las principales traducciones latinas antiguas y las traducciones más significativas, e incorporar el texto griego del *Problema de los bueyes* y la versión latina del *Libro de los Lemas*[77], publicó el texto junto con su traducción latina (Leipzig, 1881), texto que amplió y corrigió a la luz del hallazgo del palimpsesto aparecido en Constantinopla. Esta segunda versión de las obras de Arquímedes se imprimió entre 1910 y 1915, y contenía ya el *Método,* el texto griego del tratado *Sobre los cuerpos flotantes,* desconocidos hasta entonces, e incorporaba también los fragmentos griegos del *Stomachion;* en 1972 fue reimpresa —ya en Stuttgart, nueva sede de la colección Teubner— con correcciones añadidas por E. Stamatis. Por esos mismos años, entre 1970 y 1972, la colección *Les Belles Lettres* publicó el texto griego —el de Heiberg, en lo fundamental, con algunas correcciones procedentes del *Parisinus Graecus* 2359 (F)— acompañado de la traducción francesa de Ch. Mugler.

Entre las traducciones a las lenguas modernas[78] publicadas a lo largo del último siglo, la versión inglesa de Heath es un clásico para el estudio de Arquímedes, así como la

[77] No disponemos del original griego de esta obra, pero nos ha sido transmitido en una traducción árabe realizada en el siglo IX por el geómetra Thabit-ben-Corrah. Esta versión árabe, de la que poseemos diversos manuscritos, fue traducida al latín e impresa dos veces a lo largo del siglo XVII: la primera de esas dos ediciones contiene la traducción latina de Graeves, con comentario de Samuel Forster, y fue editada en Londres en 1657; la segunda versión latina fue obra del famoso orientalista Abraham Ecchellensis y fue publicada, con notas de Borelli, en Florencia en 1661.

[78] Hacemos referencia fundamentalmente a las versiones de las obras completas, aunque también se han editado traducciones y comentarios de obras sueltas.

obra —en holandés primero, vertida después al inglés— de Dijksterhuis[79], ambas fáciles de encontrar en librerías gracias a las repetidas reimpresiones que dan fe de su éxito, basado en la excelente calidad de ambos trabajos. Hay que dejar claro que ninguna de las dos es, propiamente hablando, una traducción, sino que ambas pretenden poner al alcance del matemático del siglo XX los principales resultados de las investigaciones de Arquímedes. Heath, en particular, no ha renunciado a ampliar las explicaciones donde la concisión del original arquimedeo hacía difícil la comprensión o a aclarar pasajes de difícil interpretación y emplea sistemáticamente la terminología y métodos de la matemática actual; Dijksterhuis, por su parte, da traducción rigurosa sólo de los enunciados, mientras que las pruebas propiamente dichas las expone mediante una notación simbólica creada por él con el propósito específico de facilitar la comprensión de la matemática griega antigua; además, separa y recoge en un solo capítulo cierto número de proposiciones que, en su opinión, no forman parte del núcleo de teoremas fundamentales de cada obra, sino que actúan como lemas o «elementos» (en el mismo sentido en que son elementales los *Elementos* euclidianos), pretendiendo con ello conseguir que los puntos fundamentales de cada obra puedan ser tratados y resumidos mucho más rápidamente, toda vez que las cuestiones accesorias han sido contempladas previamente. Con lo dicho que-

[79] No es propiamente una traducción, sino «un intento de acercar la obra de Arquímedes... a la comprensión y el aprecio del lector moderno» (pág. 7). Conociendo la versión en notación moderna de Heath y la traducción literal de Ver Eecke, pretende «combinar las ventajas y evitar las desventajas de ambos métodos... La exposición sigue de cerca el texto griego, pero sólo los enunciados figuran en traducción literal; tras ellos, las demostraciones se exponen en una notación simbólica, especialmente elaborada para este propósito, que hace posible seguir paso a paso la línea del razonamiento» (págs. 7 y 8).

da de manifiesto que los trabajos de Heath y Dijksterhuis, en tanto que explicaciones pensadas para sus contemporáneos, están en realidad más emparentados con los *Comentarios* de Eutocio que con la traducción antigua de Moerbeke o con las más recientes de Ver Eecke, Mugler o Netz.

En francés se destacan las traducciones del ingeniero belga Paul Ver Eecke y la de Charles Mugler, a la que ya aludimos antes, ambas de gran calidad; también hay que reseñar la versión alemana de Czwalina, la italiana de Frajese y la traducción al griego moderno de Stamatis. En español contamos sólo con una versión casi completa —no aparecen el *Stomachion* ni los *Lemas*—, editada en el segundo volumen de las obras de los *Científicos griegos* (1970); en ella no se menciona el traductor[80] ni el texto sobre el que ha sido elaborada. Entre nosotros la obra que ha despertado más interés ha sido el *Método,* el cual, desde que fue descubierto hace aproximadamente un siglo, ha visto aparecer varias versiones: la de Babini (Buenos Aires 1966) es poco fiable al no haber sido realizada a partir del texto griego, y algo semejante ocurre con la que aparece en el ya citado volumen II de los *Científicos griegos;* más dignas de mención son la de L. Vega, con traducción de M.ª Luisa Puertas, acompañada de introducción y algunas notas (Madrid, 1986) y la más reciente de González Orbaneja y Vaqué Jordi (Barcelona, 1993), que antes de ser libro fue seminario universitario; con amplia introducción (56 págs.) y abundantes notas (con aclaraciones textuales, históricas y matemáticas), incluye reproducción fotomecánica de la edición de Heiberg y nuevas figuras realizadas por González Orbaneja. También dis-

[80] Según la portada, «recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas» han corrido a cargo de Francisco Vera.

ponemos de traducción al español del tratado *Sobre los círculos tangentes,* realizada por J. Vernet y A. Catalá[81].

La Cambridge University Press acaba de publicar —mayo de 2004— una nueva traducción inglesa —la primera a la que de verdad corresponde tal nombre—, obra de Reviel Netz. En esta obra, cada proposición de Arquímedes va seguida de un comentario textual relativo al texto ofrecido por Heiberg —que Netz no reproduce— y unos comentarios generales centrados en cuestiones de carácter epistemológico o lingüístico, y presenta como novedad principal la ya comentada edición científica de los diagramas. Incluye también la primera traducción al inglés del *Comentario* de Eutocio a los libros *Sobre la esfera y el cilindro.*

EUTOCIO

Ya dijimos que frente a la intención claramente didáctica de los *Elementos* de Euclides, que nos presentan una introducción elemental a todas las ramas de la matemática de la época, los escritos de Arquímedes están más próximos al ensayo científico: no son obras pensadas para un público amplio, ni siquiera de estudiantes, sino que se ocupan de cuestiones concretas, están dirigidas a otros matemáticos —y no cualesquiera, sino a personas que gozan de la buena opinión de Arquímedes— y no se proponen divulgar conocimientos, sino someter los trabajos del estudioso a un juicio ajeno cualificado. Por esa razón, Arquímedes muchas veces da por sobreentendidos en las proposiciones ciertos pasos del razonamiento que probablemente le parecían obvios. Cuando es-

[81] «Arquímedes árabe: el tratado de los círculos tangentes», Separata de *Al-Andalus* 33, 1 (1968).

tas obras dejaron de pertenecer al género del ensayo científico para transformarse en clásicos y fueron considerados dignos de estudio, los principiantes debieron de encontrar no pocas dificultades para seguir el razonamiento del maestro. Eso fue lo que, a principios del siglo VI, movió a Eutocio, matemático nacido en Ascalón y educado en Constantinopla, a emprender su *Comentario:* «Habiendo hallado que ninguno de mis predecesores había compuesto un ensayo sobre los libros de la *Esfera y el cilindro* de Arquímedes y considerando que no lo habían dado de lado por la sencillez de los teoremas —pues, como sabéis, requieren una atención minuciosa y una imaginación inteligente—, me apeteció, en la medida de mis fuerzas, poner en claro lo que en ellos hay de difícil comprensión».

Con estas premisas redactó el *Comentario a los libros sobre la Esfera y el cilindro.* Los manuscritos nos han transmitido también *Comentarios* a la *Medida del círculo,* al *Equilibrio de las figuras planas* y a los cuatro primeros libros de las *Cónicas* de Apolonio de Perga. Los escritos van precedidos de pequeñas introducciones, que incluyen dedicatorias: a Amonio le dedica el *Comentario* a los dos libros *Sobre la esfera y el cilindro,* a Antemio de Trales los de los cuatro libros de las *Cónicas* de Apolonio y a un desconocido Pedro el del *Equilibrio de las figuras planas.* Además de estos trabajos, de autoría bien documentada en la tradición manuscrita, Mogenet[82] le atribuyó también la redacción del escrito que hoy conocemos bajo el título de *Introducción al Almagesto de Ptolomeo.* Este texto, que venía considerándose anónimo, está formado por una serie de escolios al *Almagesto* que acabaron tomando forma de obra independiente. La atribución de Mogenet se basa en ciertos pasajes del comen-

[82] MOGENET, *L'Introduction à l'Almageste,* Bruselas, 1956.

tario a la *Medida del círculo,* pero Bulmer-Thomas considera que esos textos no son apoyo suficiente para sostener la hipótesis propuesta. Frente a esos dos autores, Wilson opina que Eutocio sí escribió sobre ese tema, pero que no se han conservado restos de tal trabajo.

Las dedicatorias que preceden a los *Comentarios* son, prácticamente, las únicas fuentes de que disponemos sobre la vida de Eutocio[83]. Amonio, comentador de Aristóteles y maestro de profesión, entre cuyos discípulos se contaron personajes como Juan Filópono, Damascio o Simplicio, probablemente fue también maestro de Eutocio, pues éste le llama «destacadísimo filósofo»[84] y dice dirigiéndose a él: «si por causa de mi juventud doy la nota desafinada, tú lo corregirás gracias a tu saber en toda clase de conocimientos y especialmente en matemáticas»[85]. En cuanto a Antemio de Trales, conocido sobre todo por haberse ocupado de las obras de Santa Sofía de Constantinopla junto con Isidoro de Mileto, debió de ser compañero de Eutocio, pues éste le trata de «querido compañero» *(phíle hetaîre)* y «queridísimo mío» *(phíltaté moi)*[86]. Las dataciones de estos personajes, que conocemos sólo de modo aproximado[87], son las que

[83] Cf., a este respecto, lo reseñado por WILSON *(Scholars of Byzantium,* Londres, 1983, págs. 45-46) y los artículos de BULMER-THOMAS en el *Dictionary of scientific biography* (ed. GILLISPIE, Nueva York, 1981, 10 vols.) y KAZHDAN en el *Oxford Dictionary of Byzantium* (Nueva York, 1991, 3 vols.).

[84] *Comentario a los libros sobre la Esfera y el cilindro,* en Arquímedes, *Opera omnia,* ed. HEIBERG, vol. III 2, 16.

[85] *Id.* III 2, 12-15.

[86] *Comm. in Conica,* en APOLONIO DE PERGA, *Quae Graece exstant,* ed. HEIBERG, II 168, 5 y II 291, 2-3.

[87] Probablemente Amonio murió después de 517 y Antemio de Trales antes de 558.

han llevado a los estudiosos a proponer la *acmé*[88] de Eutocio en torno a 520 y su nacimiento, por tanto, en torno a 480[89].

En los textos de Eutocio figura también[90], aunque no como receptor de las dedicatorias, un «Isidoro de Mileto el Mecánico» a quien se trata repetidamente de «nuestro maestro»; las frases han sido interpretadas, en general, como colofones de copista, el cual podría haber sido un discípulo de ese Isidoro encargado por éste de «poner en limpio» el trabajo. Los mencionados colofones atribuyen a Isidoro, además de la edición de los *Comentarios* de Eutocio a los dos libros *Sobre la esfera y el cilindro* y a la *Medida del círculo,* la invención de un compás para trazar parábolas. No hay unanimidad respecto a la identificación del personaje: algunos especialistas, como Heath, piensan que este Isidoro de Mileto es el arquitecto de Santa Sofía y que quizá fuera maestro de Eutocio. La segunda parte del aserto es difícilmente aceptable: para la muerte de Amonio tenemos como *terminus ante quem* la fecha de 517; en cuanto a Isidoro de Mileto suponemos que murió entre 537, fecha de la finalización de Santa Sofía, y 554, fecha en que su sobrino, Isidoro el Joven, llevó a cabo la restauración de la cúpula de ese mismo edificio. Teniendo en cuenta que los jóvenes comenzaban sus estudios con un maestro avanzado en torno a los 18 o 20 años y que el tiempo de estudio junto a un maes-

---

[88] Los antiguos consideraban que un hombre estaba en la plenitud *(acmé)* de sus facultades en torno a los cuarenta años, y no es raro que se date a literatos o políticos mediante esta referencia.

[89] Así en autores más recientes, como Wilson o Clagett, pero Tannery y con él Heiberg son partidarios de datar su *acmé* en torno al año 500 y su nacimiento, por tanto, en torno a 460.

[90] Las referencias se encuentran en la edición de Heiberg, *Archimedes. Opera omnia,* III 84, 9; III 48, 30; III 224, 9; III 260, 12.

tro rara vez sobrepasaba los tres o cuatro años es verdaderamente difícil que Eutocio haya podido ser discípulo de ambos personajes; Bulmer-Thomas[91] también da por fiable la identificación de este Isidoro con el famoso arquitecto, pero sostiene que debemos interpretar la noticia como un testimonio de que revisó la edición, no el contenido de la obra. Tannery, por su parte, pensaba más bien que no se trata del famoso arquitecto, sino de otro personaje, tal vez el mencionado Isidoro el Joven.

En cuanto a la cronología de los trabajos de Eutocio, para el *Comentario* al *Equilibrio de las figuras planas* no hallamos referencias que permitan datarlo, pero el *Comentario* a los dos libros *Sobre la esfera y el cilindro* tiene que ser anterior al de la *Medida del círculo,* puesto que Eutocio menciona la primera de estas obras en el proemio de la segunda. Posterior a esos dos trabajos sería el *Comentario* a las *Cónicas,* según parecen apuntar algunos indicios. Uno, que de las expresiones empleadas para referirse a Amonio que citábamos más atrás cabe deducir que cuando redactó ese trabajo Eutocio debía de ser un hombre relativamente joven y de posición académica y social aún poco relevante; por eso, como obra de primerizo y dada la dificultad de la materia, necesita aún de la mirada supervisora del maestro Amonio, mientras que cuando comenta las *Cónicas* de Apolonio es un Eutocio de más edad quien se enfrenta a la tarea, un hombre con la suficiente seguridad en sus capacidades como para no necesitar de supervisores y que puede dedicar su obra al «compañero» de éxito probado que era el arquitecto Antemio de Trales —quien, además, había dado pruebas de su interés por los matemáticos antiguos al ocuparse

[91] Cf. más atrás, n. 2.

de los espejos ustorios[92]—. El segundo indicio que, a nuestro entender, abona esta hipótesis son dos pasajes del *Comentario* a las *Cónicas*: uno procede del proemio al *Comentario* al Libro I, en donde afirma: «Salta a la vista en muchos pasajes que Arquímedes se refiere a unos elementos de las cónicas muy anticuados»; el otro, del proemio al del Libro IV: «Todo lo que hay en él ⟨scil., en el Libro IV⟩ se demuestra mediante reducción al absurdo, igual que demostró Euclides lo relativo a las secciones y tangencias del círculo. Este recurso es útil y necesario, según les parece tanto a Aristóteles como a los geómetras, y especialmente a Arquímedes». De ambos pasajes parece desprenderse que por entonces Eutocio ya estaba bien familiarizado con las obras de Arquímedes[93] y el comentario de éstas habría sido redactado con anterioridad.

Ya hemos dicho que Eutocio no tuvo oportunidad de leer toda la obra de Arquímedes: la *Medida del círculo,* que no se nos ha conservado completo, es comentada por Eutocio en una versión que coincide exactamente con la que nosotros conocemos. Precisamente en ese *Comentario* (III 228, 20-26), Eutocio afirma que según la biografía (para nosotros perdida) de Arquímedes por Heraclides[94], Arquímedes «había descubierto una recta igual a la circunferencia dada de un círculo gracias a ciertas espirales», y de ello deducimos que no conoció el tratado *Sobre las espirales*. Además, en *Equil. Plan.* II 1, Arquímedes requiere aplicar a una recta

---

[92] Para el trabajo de Antemio sobre los espejos ustorios, cf. pág. 12 y n. 9.

[93] Mugler considera los *Comentarios* a las *Cónicas* anteriores a los de la *Esfera y el cilindro* y a la *Medida del círculo,* aunque no ofrece ninguna argumentación.

[94] En el texto del *Comentario* al libro I de las *Cónicas* de Apolonio *(Apollonii Pergaei quae graece exstant* II 168, 7, ed. Heiberg) al biógrafo de Arquímedes se le da el nombre de Heraclio.

dada dos superficies limitadas por una recta y una parábola, y Eutocio, en el *Comentario* a ese pasaje (III 278, 4-13) dice: «Pero no es posible encontrarlo entre lo que demuestra allí; ahora bien, puesto que demostró [«Arquímedes», *scil.*] según él mismo afirma en el tratado *Sobre la esfera y el cilindro,* que tal figura es cuatro tercios del triángulo que tiene igual base e igual altura...», de modo que tampoco conoció la *Cuadratura de la parábola.*

Estos hechos parecen apuntar a la escasa circulación de los manuscritos de Arquímedes, incluso entre los especialistas —pues no de otra manera podemos considerar a personajes como Eutocio, Antemio o Amonio—. No disponemos de datos que precisen los motivos de tal situación, pero es muy posible que entre ellos se cuenten la dificultad del texto de Arquímedes, por una parte, y el hecho de que los originales de sus obras estuvieran escritos en el antiguo dialecto dorio de Siracusa. Para Heath, los *Comentarios* de Eutocio suponen, precisamente, un testimonio del renacer de los estudios sobre Arquímedes, renacer manifestado además en el traslado de la antigua forma de los tratados del siracusano en dialecto dorio a la *koinè diálektos*[95], aunque también esta cuestión es peliaguda, pues unas veces Eutocio cita a Arquímedes en *koiné* y otras comienza su cita en *koiné* y a la mitad de la misma vuelve de nuevo al original dorio, lo que puede ser interpretado de diversas maneras: tal vez las obras de Arquímedes ya habían perdido en algunas ediciones su dialecto original; tal vez fue el propio Eutocio quien, al comentarlas, aprovechó para pasarlas de uno a otro dialecto; tal vez los manuscritos de que disponía estaban en dorio pero, al copiar la cita, Eutocio pasa de uno a otro dialecto sin

[95] Heath sostiene, además, que este interés por Arquímedes se suscitó en el seno del círculo de Isidoro de Mileto, pero ya hemos visto que la cronología ofrece ciertos problemas para aceptar esa suposición.

prestar demasiada atención a ese asunto. Hasta el momento presente no se han aportado datos o criterios que permitan dilucidar la cuestión.

En cualquier caso, no debemos olvidar que la existencia del comentario sirvió de apoyo a la transmisión de las obras comentadas pues, en efecto, todas las obras comentadas por Eutocio han llegado hasta nosotros, tanto las de Apolonio[96] como las de Arquímedes; en general se supone que los comentarios —probablemente usados por Eutocio en sus clases— debieron de servir de acicate a la lectura de esos textos y, por tanto, a la renovación y multiplicación de copias de los originales.

Los *Comentarios* tienden a completar las proposiciones de Arquímedes llevando a cabo demostraciones, resolviendo la construcción de las figuras o recorriendo en detalle los pasos de determinadas manipulaciones de proporciones —en cuyo manejo Arquímedes era tan hábil como parco en palabras al explicarlo—. Las aclaraciones son a veces una estupenda ayuda para el lector; otras, pecan de exceso por entrar a detallar lo que cualquier principiante podía conocer sobradamente; en alguna ocasión Eutocio se confunde —por ejemplo, afirmando que son semejantes dos segmentos parabólicos que no lo son *(Equilibrio de las figuras planas* 8, Heiberg III 290, 22-24)— o reconoce que no es capaz en su comentario de ir más allá de la perífrasis *(Equilibrio de las figuras planas* 9). Esas deficiencias, sin embargo, no pueden utilizarse para despreciar la obra ni para hacer de menos al tratadista[97] ni para ocultar el hecho de que Eutocio era un

[96] De los libros IV al VIII, que Eutocio no comentó, el último se ha perdido y los otros tres sólo los conocemos en versión arábiga.

[97] Sobre todo si tenemos en cuenta que incluso los más reputados comentarios actuales de la obra de Arquímedes recurren a Eutocio —aunque no siempre lo citen— para la explicación de determinados pasajes.

buen conocedor de los textos que comentaba, aunque no hallemos en él rasgos ni pretensiones propias de una mentalidad creativa... salvo la iniciativa de emprender esta tarea. Es, además, un erudito que recurre sin pereza a los libros antiguos para recopilar las soluciones al problema de Delos, para buscar el casi perdido lema de Arquímedes a *Esf. cil.* II 4, y que para preparar los *Comentarios* a las *Cónicas* de Apolonio no tiene empacho en reunir las diversas ediciones que circulaban (Apol., II 176, 16 y ss., ed. Heiberg) y leer y seleccionar los escolios, sin contar sus referencias a Euclides, Ptolomeo, o Gémino. Las menciones de Platón y Aristóteles son testimonio de lecturas ajenas a la matemática, que resultan más bien parcas.

Pero independientemente de la recreación del personaje y su circunstancia vital, lo que en realidad más ha contribuido a que Eutocio goce del reconocimiento de los matemáticos del último siglo y medio es que este estudioso recogió una información única y de valor excepcional en relación con tres asuntos sobre los que, sin su obra, estaríamos poco documentados. El peso de estas cuestiones en el *Comentario* es tal que el espacio que se les dedica sobrepasa con creces la mitad del mismo. En primer lugar está la aportación de Eutocio a nuestro conocimiento del sistema de cálculo empleado por los matemáticos griegos: en la *Medida del círculo* Arquímedes calcula la relación entre la circunferencia y el diámetro de la misma hasta determinarla entre 3 1/7 y 3 10/71, pero nos ofrece sólo los resultados de sus operaciones, y no el desarrollo de las mismas. Con el argumento de que la manera de obtener raíces cuadradas ya había sido explicada por Herón, Papo, Teón y otros comentadores de la *Megálē Sýntaxis* de Ptolomeo, Eutocio no reproduce los cálculos, sino que lleva a cabo las multiplicaciones que sirven de prueba a las operaciones realizadas por Arquímedes. El

nivel puede parecer sorprendentemente bajo, pero se han señalado datos reveladores sobre lo elemental de las habilidades medias de cálculo en la Antigüedad. Por ejemplo, en el siglo IV d. C. el funcionario Hermesión copiaba una tabla de multiplicar en el mismo cuaderno en que redactaba los horóscopos y llevaba las cuentas administrativas; en otro caso, del siglo VII, el texto recoge ejercicios aritméticos de nivel apenas por encima del muy elemental (tablas de números fraccionarios —como 1/2 o 1/3— de la serie de los números enteros; multiplicaciones del tipo 19x55 o 78x76): y la escritura es la de un adulto, no la de un niño[98]. Estas referencias, procedentes de papiros, han de usarse con la debida precaución, dada la falta de contexto en tal clase de documentos, pero han de ser tenidas en cuenta como posibles indicios del nivel de conocimientos de los destinatarios del comentario de Eutocio. Los cálculos han sido vertidos de la notación numérica griega —reconstruida previamente, a su vez— con la ayuda de textos hindúes, a la notación arábiga primero por Heiberg, para su versión latina de la obra de Eutocio, y después por Mugler en su edición bilingüe griego-francés, donde el interesado en el detalle de esta cuestión puede consultar los originales[99]. La segunda cuestión relevante aparece en el *Comentario* a *Esf. cil.* II 1, donde se recogen las diversas soluciones dadas en la Antigüedad al problema de hallar dos medias proporcionales entre dos rectas dadas, cuestión en relación directa con la duplicación del cubo, uno de los tres problemas clásicos de la matemática

[98] Tomo los datos de H. I. MARROU, *Historia de la Educación en la Antigüedad,* Buenos Aires, Eudeba, 1965, págs. 190-192 y nn. correspondientes, en págs. 469 y 470.

[99] Para detalles sobre estas ediciones, cf. Bibliografía.

griega[100], también llamado «problema délico» o «problema de Delos». El tercer asunto de especial interés procede del *Comentario* a *Esf. cil.* II 4: en el transcurso de la demostración de ese teorema surge la necesidad de una construcción que requiere la resolución del equivalente geométrico de cierto tipo de ecuación cúbica. Arquímedes promete en su texto resolver ese punto al final, pero no aparece el lema correspondiente. Eutocio, tras haber buscado insistentemente la solución de ese punto concreto, la recupera tomándola de un manuscrito antiguo que, en su opinión, puede ser la propia solución prometida por Arquímedes, ya que el texto está en el dialecto dórico de Arquímedes, no obstante lo cual aporta también soluciones propuestas por otros matemáticos.

Las soluciones a los dos últimos problemas que Eutocio recoge proceden de obras que, en su mayor parte, no se nos han conservado, lo que les confiere gran interés para la historia de la matemática griega: ésa es la razón que nos ha movido a incluir esos textos como acompañamiento a la presente traducción de la obra de Arquímedes.

El problema délico

La cuestión de hallar dos medias proporcionales entre dos rectas dadas se remonta muy atrás en el tiempo; incluso, según relata una carta atribuida a Eratóstenes, a la época homérica —antes de que los griegos hubieran pensado en rectas, curvas ni números de ninguna clase—, cuando Minos, el mítico rey de Creta, al ver el túmulo levantado en honor de su hijo Glauco, lo encontró demasiado pequeño y

---

[100] Sobre este punto pueden consultarse BOYER, *Historia de la matemática,* págs. 97-105, HEATH, *HGM*, vol. I, págs. 220-270 y P. ORTIZ GARCÍA, «Problemas clásicos y soluciones imaginativas», en J. L. ARCAZ y M. MONTERO (eds.), *Hombre y naturaleza. El nacimiento de la ciencia y la técnica en el mundo clásico,* Madrid, SEEC, 2004.

encargó al arquitecto que lo duplicara. El arquitecto duplicó el lado y, lógicamente, la superficie resultó el cuádruple y el volumen ocho veces más. Minos entonces llamó a los geómetras para que hallaran la forma de resolver el problema y éstos intentaron resolverlo tomando como figura base la de un cubo; por eso al problema empezó a llamársele «duplicación del cubo», pero la verdad es que no es que los geómetras no supieran resolverlo: es que no sabían ni cómo plantearlo. Hipócrates de Quíos fue el primero al que se le ocurrió la reducción[101] del problema que daría a éste su forma clásica: si se hallaba el medio de tomar dos medias proporcionales en proporción continua entre dos líneas rectas, de las cuales la mayor fuera el doble que la menor, se podría hallar, dada la arista de un cubo, la arista de otro cubo doble del primero; es decir, que si se hallaban dos medias proporcionales, del tipo $a : x = x : y = y : 2a$, la arista del cubo doble del propuesto sería x. Esta reducción fue adoptada por todos los matemáticos posteriores que se dedicaron a este problema, que ni siquiera así era sencillo. Más adelante —sigue contando el relato— los delios fueron a consultar el oráculo de Apolo para librarse de una peste que les aquejaba y recibieron de éste la orden de duplicar el altar: de ahí el otro nombre de «problema delio» o «problema de Delos» con que se le conoce. Pero a los delios les pasó lo que al arquitecto de Minos y pensaron que, si mandaban traer a los geómetras de la Academia de Platón, éstos darían con la respuesta; otra versión de la carta de Eratóstenes[102] dice que Platón les respondió que el oráculo quería decir no que el dios deseara un altar el doble de grande, sino que quería avergonzar a los griegos por su desprecio de las matemáticas.

---

[101] A este recurso de reducir un problema a otro cuya solución parece más factible se le daba en griego el nombre de *apagōgḗ*.

[102] Conservada en Teón de Esmirna, 2 Hiller.

El relato, sumamente ameno, no contiene más noticias fidedignas que la reducción efectuada por Hipócrates y la noticia de que los geómetras de la Academia se ocuparon de la cuestión. Pero el caso es, en último término, que Arquímedes, cuando se le presenta el problema, lo resuelve con un «Hágase», sin ofrecer lemas ni remitir a demostraciones posteriores: porque para Arquímedes y sus contemporáneos la solución debía de ser conocida suficientemente. Sin embargo, en el tiempo que medió entre la redacción de las obras de Arquímedes y su lectura por Eutocio, se había olvidado la cuestión hasta tal punto que Eutocio recoge doce soluciones debidas a once matemáticos (a Menecmo se le atribuyen dos), pero no cierra el asunto presentando como canónica ninguna de ellas, a pesar de las notables diferencias de enfoque y calidad matemática existentes entre las mismas.

Los autores de esas soluciones son, en el orden que Eutocio nos presenta sus trabajos, los siguientes: Platón, Herón, Filón de Bizancio, Apolonio, Diocles, Papo, Esporo, Menecmo, Arquitas, Eratóstenes y Nicomedes. Eutocio afirma haber leído también una solución atribuida a Eudoxo, pero cuenta que la rechazó porque «en el proemio afirma haberlo descubierto mediante líneas curvas, mientras que en la demostración no sólo no ha usado las líneas curvas sino que, además, tras hallar una proporción discreta, la usa como si fuera continua, cosa que no era de sospechar no digo ya en Eudoxo, sino en cualquiera de los medianamente versados en geometría».

De las soluciones recogidas por Eutocio, algunas son idénticas, como ocurre con las de Herón, Filón y Apolonio[103]. A

[103] La solución que Eutocio atribuye a Apolonio (activo en la segunda mitad del siglo III a. C.) parece impropia del autor de las *Cónicas,* sobre todo si se tiene en cuenta que Papo *(Collectio Mathematica* III 21) atribu-

veces están doblemente testimoniadas: tal es el caso de la atribuida a Herón[104], y la de Nicomedes[105]. Las soluciones que nos transmite Eutocio como de Esporo y Papo son, en realidad, la misma que la de Diocles, con la única diferencia de que Esporo y Papo recurren a una construcción de *neûsis* mientras que Diocles había recurrido a una curva inventada por él, la cisoide[106]. Para el resto de las soluciones, Eutocio es testimonio único. Entre ellas, las de Platón y Eratóstenes son soluciones instrumentales, más emparentadas con las tareas manuales —con la ingeniería, habría que decir en el caso de Eratóstenes, a la vista de sus pretensiones— que con las matemáticas, puesto que están enfocadas directamente a la construcción de mecanismos que resuelvan el problema. Precisamente por esa aplicación menestral difícilmente po-

---

ye a Apolonio —sin reproducir la demostración— una solución exacta mediante intersecciones de cónicas. Filón de Bizancio, continuador de Ctesibio, se ocupó sobre todo de cuestiones de mecánica, no de matemáticas, aunque no despreciara la parte teórica de los asuntos. En cuanto a Herón (datación dudosa entre los siglos I a. C. y I d. C.), escribió obras de mecánica y de matemáticas —dedicadas éstas últimas sobre todo a la resolución de problemas prácticos—. A la vista de las fechas, Heiberg sospecha que Herón pudo tomar tomar la solución de un autor anterior; a ese argumento habría que sumar —añado— la tendencia de los autores antiguos a no citar sus fuentes.

[104] El texto de la solución de Herón se nos ha conservado en los *Belopoeiká* y en la *Introducción a la mecánica* —aunque de esta obra, salvo fragmentos, sólo poseemos la versión árabe—. Papo reproduce la segunda de las versiones mencionadas *(Collectio Mathematica* III 62-64).

[105] V. Papo, *Collectio Mathematica* III 58-62 y IV 246-250. De Nicomedes (II a. C.?) no se nos han conservado más noticias que las aquí referidas.

[106] V. Papo, *Collectio Mathematica* III 64-68 y VIII 1070-1072. Esporo (I-II d. C.) fue autor de unos *Kería;* Papo (III-IV d. C.) es conocido sobre todo por su *Colección matemática.* De Diocles (II a. C.) sabemos que fue el inventor de la cisoide y autor de un tratado perdido *Sobre espejos ustorios.*

demos admitir como auténtica la que se atribuye a Platón, de quien sabemos por el testimonio de Plutarco que rechazaba toda asimilación de los entes matemáticos abstractos con la realidad tangible[107] y que se quejaba de Eudoxo y Arquitas porque éstos, al haber usado recursos materiales para este problema, habían vuelto la geometría de lo inteligible a lo sensible.

Es fácil observar que los textos que recoge Eutocio proceden de todos los períodos de la historia de la matemática griega, desde los de Arquitas y Platón, de principios del siglo IV a. C., hasta los de Esporo y Papo, del siglo IV d. C. Cuesta trabajo discernir el criterio seguido para la presentación, pero quizá el orden en que nos los ofrece tenga que ver con la antigua clasificación de los problemas en «planos», «sólidos» y «lineales». Problemas planos son los que pueden resolverse mediante regla y compás, y en esa clase habría incluido Eutocio seis de las siete primeras soluciones[108], que se desarrollan en el plano y resuelven la cuestión «con regla y compás», recurriendo a las construcciones de *neûsis*. Para nosotros ese método es a todas luces insuficiente, pero los matemáticos griegos parecen haberlo aceptado sin grandes remordimientos. Problemas sólidos son los que

[107] *Vida de Marcelo* 14 y *Charlas de sobremesa* VII 2, en donde podemos leer: «Y por eso el propio Platón reprochaba a los círculos de Eudoxo y Arquitas y Menecmo que intentaran reducir la duplicación de un sólido a construcciones instrumentales y mecánicas, como si pretendieran tomar, según parece, dos medias proporcionales mediante un recurso no racional. Pues decía que esto era echar a perder y corromper la bondad de la geometría, haciendo su camino hacia abajo, hacia lo sensible, en vez de llevar hacia arriba y comprender las imágenes eternas e incorpóreas junto a las cuales está la divinidad y es siempre divinidad».

[108] La primera de las soluciones ofrecidas, la de Platón, podría ocupar el primer lugar atendiendo a un criterio a la vez cronológico y de autoridad.

se sirven de las secciones cónicas para su resolución, y a este tipo pertenecen las soluciones de Menecmo, que se desarrollan mediante intersecciones de cónicas y que, para los matemáticos actuales, son las únicas que cumplen los requisitos de rigor y precisión exigibles. A éstas siguen las soluciones que tratan el problema como lineal, es decir, del tipo de los que requieren curvas más complejas que las cónicas para su resolución: la de Arquitas, a la vez complicada y original, que lleva a cabo la intersección de un semicilindro, un cono y un toro para hallar la recta requerida, la de Eratóstenes, que trata el problema desde los puntos de vista de la resolución práctica que exige la ingeniería y de la teoría matemática, y la de Nicomedes, que pretende resolver el problema mediante la concoide, curva inventada por él y que es una de las pocas curvas trascendentes de la matemática griega.

La ecuación de tercer grado

En la demostración correspondiente a *Esf. cil.* II 4, cortar una esfera de manera que los segmentos resultantes guarden entre sí una proporción dada, es preciso, llegado determinado momento, resolver el siguiente problema: dado un segmento AB, otro segmento C y un área D, cortar AB por un punto X de tal modo que XB : C = D : AX^2; ahora bien, para llevar a cabo esa construcción es menester servirse de una ecuación cúbica[109]; Arquímedes promete resolver ese punto al final, pero al final no figura lo prometido; Eutocio se interesó, en tanto que matemático, por la resolución del lema y, en tanto que aficionado a los libros, por el propio texto arquimedeo del lema, y anduvo investigando hasta que

[109] El estudio más detallado que conozco aparece en HEATH *(HGM*, 123-141).

halló en un libro antiguo «unos teoremas escritos con no poca falta de claridad por causa de las incorrecciones y con muy variados errores en las figuras, pero que contenían el fundamento de lo que se investigaba y que, por otro lado, conservaban en parte el dialecto dorio habitual en Arquímedes, y estaban escritos con la terminología usual de la antigüedad, llamando a la parábola 'sección de un cono rectángulo' y a la hipérbola 'sección de un cono obtusángulo'»; por ello creyó que podría ser el lema prometido por Arquímedes. Le pareció difícil seguir el texto en el estado en que lo encontró, y por eso decidió escribirlo «en un lenguaje más corriente y más claro en la medida de lo posible». A título exegético, ofrece también las soluciones que dieron al problema otros dos matemáticos, Dionisodoro y Diocles.

Dionisodoro, al no encontrar modo de resolver el lema cuya demostración faltaba en los manuscritos de Arquímedes, optó por enfrentarse no al lema, sino al conjunto del problema de cortar una esfera dada de manera que los segmentos resultantes guarden entre sí la razón dada, tratándolo como problema sólido y recurriendo a la intersección de una parábola y una hipérbola.

Diocles se aplica al lema perdido y lo resuelve, también él, como problema sólido, mediante la intersección de una elipse y una hipérbola.

Principales ediciones y traducciones

El texto, que no figura en el palimpsesto, está recogido en los códices DEGH, derivados de A, y en la versión latina de Moerbeke; disponemos, además, de un excelente manuscrito del siglo x (*Vat. Graec.* 204, siglado W). Es innegable en el texto de Eutocio la presencia de interpolaciones —probablemente introducidas en el siglo IX, en la época de León

el Matemático—, pero en general se nos ha conservado en buen estado.

Habitualmente se ha editado y traducido junto con las obras de Arquímedes, aunque no todas las versiones de Arquímedes incluyan los *Comentarios*. La edición más importante es, igual que para Arquímedes, la de Heiberg. Contamos con traducciones al francés (Ver Eecke, Mugler) y al inglés (Netz). La selección de pasajes que ahora presentamos será, aunque parcial, la primera traducción de Eutocio al castellano. Hay que reseñar, en cualquier caso, que tanto Eutocio como sus obras han recibido relativamente poca atención. Ya vemos que las traducciones son escasas; no hay ningún estudio de conjunto sobre sus *Comentarios* —lo más parecido es el artículo de Clagett en el *Dictionary of Scientific Biography*—... Por no tener, no tenemos ni un índice completo de los nombres propios que figuran en su obra —los volúmenes de Heiberg que contienen la obra de Apolonio y el correspondiente *Comentario* de Eutocio no incluyen índices— y rara vez aparece su epígrafe en las bibliografías anuales de *L'Année Philologique*. Es de esperar que los trabajos de Netz y este primer intento en español de aproximación a su obra susciten el interés de otros estudiosos y veamos completarse nuestro conocimiento sobre este personaje, tenido habitualmente por segundón, pero cuya importancia en la recepción de las obras de Arquímedes y Apolonio es innegable.

NOTA TEXTUAL

Para la presente traducción hemos seguido tanto el texto como las ilustraciones de Heiberg sin otras alteraciones que alguna corrección de errata material que hemos hecho cons-

tar en nota al pasaje correspondiente. Siguiendo a Heiberg también en esto, hemos incluido entre corchetes cuadrados en el cuerpo del texto las referencias a demostraciones que justifican los asertos de Arquímedes, considerando que para el matemático esas referencias pueden ser de gran utilidad y para el filólogo son una muestra del cuidado minucioso empleado por el editor.

Por otro lado, una forma de corrupción de los textos que se da con relativa frecuencia es la inclusión de escolios o glosas en el cuerpo del mismo. Tal fenómeno es especialmente frecuente y abundante en los textos matemáticos: el lector atento de un manuscrito incluye a veces en los márgenes, para sí o para sus discípulos, breves indicaciones que aclaran un pasaje de difícil comprensión, o remite a otra demostración u otra obra en la que se prueba determinado aserto utilizado en una demostración concreta, o repite una referencia a los elementos del diagrama empleado; sus glosas marginales se unen a las del estudioso que ha empleado más de un manuscrito y ha corregido el uno sirviéndose del otro. Sin entrar en labor de crítica, copia todo lo que encuentra, y así se llega a un texto alterado en el que distinguir el original de las glosas es aún más difícil que en el preexistente. Los modos de edición tradicionales suelen marcar la seclusión de lo que se sospecha que puedan ser glosas de ese tipo poniendo esa parte del texto entre corchetes cuadrados, y así actúa también Heiberg, manteniendo entre corchetes cuadrados en el cuerpo del texto los pasajes que considera espurios. Esta labor crítica, aunque discutible puntualmente, representa un intento de aproximación al texto original que resulta especialmente fiable dada la experiencia de su autor, editor no sólo de Arquímedes, sino también de Euclides y Apolonio, y la calidad de su trabajo en materia de paleografía y crítica de los textos.

El resultado de ese trabajo de depuración del texto ha producido diversos resultados en las traducciones a las lenguas modernas: Heiberg omite esos pasajes en su traducción latina; Mugler, que suele coincidir con Heiberg en los pasajes secluidos, los incluye en la traducción sin marcarlos; Netz opta también por incluirlos en su traducción, pero conservando los corchetes y discutiendo en el comentario los pasajes en cuya valoración difiere. Echando también nosotros nuestro cuarto a espadas, y con la intención de ofrecer las demostraciones de Arquímedes en la forma más pura que hasta ahora se ha podido reconstruir —a falta de mejor edición griega—, hemos preferido omitir esos pasajes en el cuerpo del texto, pero los ofrecemos en cursiva en notas a pie de página en la idea de que el lector podrá así aproximarse mejor al estado original del texto en los manuscritos. A la vez, hemos renunciado a todo debate de carácter textual, que queda fuera de las pretensiones de esta colección y que encuentra su lugar más bien en las versiones comentadas, los artículos eruditos o la confección de una nueva edición.

En cuanto a la cuestión de la literalidad de la presente traducción, hemos hecho ya exposición de nuestra postura en los apartados relativos a la terminología y a la teoría de proporciones. Se trata de una cuestión repetidamente discutida en relación con los textos matemáticos griegos, como lo prueba la presencia constante de apartados dedicados a tal materia en las introducciones a las versiones en lenguas modernas: a nuestro entender, el texto griego no está lleno de «sobreentendidos» que deban ser incluidos entre corchetes[110], como ofreciendo excusas por su presencia; lo que

[110] Opinión que compartimos, por ejemplo, con Mugler; otros traductores, sin embargo, como Netz, se inclinan a favor de la postura contraria.

ocurre más bien es que la lengua griega disponía de unas armas gramaticales que favorecían la expresión abreviada de la terminología matemática mediante la sustantivación del epíteto o del sintagma preposicional —igual que en el lenguaje corriente disponía de desinencias para la expresión de las personas gramaticales que excusaban la repetición del sujeto de la oración—. El español no dispone ni de tres géneros gramaticales ni de tanta facilidad para la sustantivación, por lo que la terminología matemática no es tan concisa: así son las cosas. Y nos parece que lo más razonable, en esa situación, es procurar conservar las formas de expresión habitual mediante otras lo más próximas posible, a sabiendas de que el razonamiento matemático griego se basa en lo geométrico y no en lo algebraico, y que al lector le costará una docena de teoremas habituarse a esas formas de expresión y razonamiento.

Por último, aclaremos que las citas del texto de Arquímedes se refieren siempre a la edición de Heiberg-Stamatis: volumen (en romanos), página y línea (en arábigos).

El profesor Mariano Martínez, de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, ha tenido la amabilidad de leer el volumen; sus sugerencias han contribuido a pulir este trabajo, y por ello deseo expresarle mi más profundo agradecimiento.

BIBLIOGRAFÍA

Repertorios bibliográficos

J. L. BERGGREN, «History of Greek Mathematics: A Survey of Recent Research», *Historia Mathematica* 11 (1984), 394-410.

F. J. DUARTE, *Bibliografía: Euclides Arquímedes Newton,* Caracas, Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, 1967.

W. R. KNORR., «Archimedes after Dijksterhuis. A guide to recent studies» [En apéndice a DIJKSTERHUIS (1987)].

J. NEU, «One hundred and ninth bibliography of the history of science and its cultural influence», *Isis* 75, 5 (1984), 1-206.

A. PROCISSI, «Bibliografia della matematica greca antica», *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche* 1 (1981), 7-149.

También I. SCHNEIDER (1979, págs. 177-196) ofrece un amplio apartado bibliográfico y la revista *Isis* publica habitualmente artículos de novedades bibliográficas sobre la historia de la ciencia y su influencia cultural.

Ediciones

J. GECHAUFF, *Archimedis... Opera quae quidem exstant omnia...; nuncque primum et Graece et Latine edita. Adiecta quoque sunt Eutocii Ascalonitae in eosdem Archimedis libros Commentaria item Graece et Latine, numquam antea excusa,* Basilea,1544.

F. COMMANDINO, *Archimedis Opera non nulla a — nuper in latino conversa, et commentariis illustrata,* Venecía, 1558.

F. MAUROLICO, *Admirandi Archimedis Syracusani Monumenta omnia mathematica quae exstant...,* Palermo, 1685.

D. RIVAULT, *Archimedis opera quae exstant novis demonstrationibus commentariisque illustrata,* París, 1615.

J. TORELLI, *Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae Commentariis ex rec. — cum nova versione Latina,* Oxford, 1792.

J. L. HEIBERG, *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii,* Leipzig, Teubner, 1913 (3 vols.).

J. L. HEIBERG, E. STAMATIS, *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii,* Stuttgart, Teubner, 1972 (3 vols.).

CH. MUGLER, *Archimède,* París, Les Belles Lettres, 1971 (4 vols.; incluye los *Comentarios* de Eutocio).

E. STAMATIS, *Archimédous hápanta,* 4 vols. Texto antiguo con traducción al griego moderno y comentario, Atenas, 1970-1974.

Traducciones

A. CZWALINA, *Archimedes. Werke,* con traducción y notas a cargo de —, con dos apéndices: *Kreismessung*, traducido por F. Rudio, y *Des Archimedes Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen*, traducido por J. L. Heiberg y comentado por H. G. Zeuthen, Stuttgart, 1972[3].

E. J. DIJKSTERHUIS, *Archimedes. With a new bibliographical essay by W. R. Knorr,* Princeton, Princeton University Press, 1987.

A. FRAJESE, *Archimede, Opere,* Turín, 1974.

TH. HEATH, *The Works of Archimedes* y *The Method of Archimedes,* Nueva York, Dover, 2002 (rp. de la ed. de1912).

R. NETZ, *The Works of Archimedes,* translation and commentary. Vol. I: *The two Books On the Sphere and the Cylinder,* Cambridge, Cambridge University Press, 2004 (contiene también la traducción del *Comentario* de Eutocio a los dos libros *Sobre la esfera y el cilindro).*

P. Ver Eecke, *Les œuvres complètes d'Archimède,* París, Blanchard, 1921 (sin Eutocio); la segunda edición (Lieja 1960), con los *Comentarios* de Eutocio.

Estudios

J. Babini, *Arquímedes,* Buenos Aires, Espasa Calpe,1948.

J. L. Berggren, «A lacuna in Book I Archimedes' Sphere and Cylinder», *Historia Mathematica* 4 (1977), 1-5.

C. B. Boyer, *A history of Mathematics = Historia de la matemática*, trad. M. Martínez Pérez, Madrid, Alianza,1999.

M. Clagett, «The Impact of Archimedes on Medieval Science», *Isis* 50 (1959), 419-429.

—, *Science of Mechanics in the Middle Ages,* Madison, University of Wisconsin Press, 1959.

—, *Archimedes in the Middle Ages,* 5 vols. Madison 1964, Filadelfia, 1976, 1978, 1980, 1984.

—, art. «Archimedes», en Ch. C. Gillispie, *Dictionnary of Scientific Biography,* Nueva York, Charles Scribner's Sons,1981.

M. Decorps-Foulquier, *Recherches sur les Coniques d'Apollonios de Pergé et leurs commentateurs grecs,* París, Klincksieck, 2000.

A. G. Drachmann, *The Mechanical Technology of Greek and Roman Antiquity,* Copenhague, Munksgaard, 1963.

—, «Fragments from Archimedes in Heron's Mechanics», *Centaurus* 8 (1963), 91-146.

A. Favaro, *Archimede,* Roma, 1923.

A. Frajese, «Archimedea» *Cultura e Scuola* 55 (1975), 190-196.

J.-L. Gardies, *Le raisonnement par l'absurde,* París, Presses Universitaires de France, 1991.

Ch. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography,* Nueva York, Charles Scribher's Sons, 1981, 10 vols.

Th. Heath, *A History of Greek Mathematics,* Nueva York, Dover, 1981 (reimpresión de la ed. de Oxford 1921), dos vols.

I. L. Heiberg, *Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum,* Múnich, 1925.

—, «Eine neue Archimedesschrift» *Hermes* 42 (1907), 235 y ss.

A. JONES, art. «Greek Applied Mathematics» en I. GRATTAN-GUINNESS (ed.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences,* Baltimore, John Hopkins University, vol. I, págs. 58-63.

A. P. KAZHDAN, *The Oxford Dictionary of Byzantium,* Oxford, Oxford University Press, 1991 (3 vols.).

W. R. KNORR, «Construction as Existence Proof in Ancient Geometry», *Ancient Philosophy* (1983), 125-148.

—, *The Ancient Tradition of Geometric Problems,* Nueva York, Dover, 1993 (rp. de la ed. de Boston, 1986).

—, «Archimedes and the elements. Proposal for a revised chronological ordering of the Archimedean Corpus» *Archiv for History of Exact Sciences* 19 (1978), 211-290.

—, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry,* Boston, Birkhäuser,1989.

A. KOYRÉ, «Galileo and Plato», en *Metaphysics and Measurement. Essays in Scientific Revolution,* Suiza *(et al.),* Gordon and Breach, 1968[2].

T. KRISCHE, «Die Rolle der Magna Graecia in der Geschichte der Mechanik», *Antike und Abendland* 41 (1995), 60-71.

W. R. LAIRD, «Archimedes among the humanists» *Isis* 82 (1991), 629-638.

G. LORIA, *Le scienze esatte nella antica Grecia,* Milán 1914.

J. MOGENET, *Introduction à l'Almageste,* Bruselas, 1956.

CH. MUGLER, *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des grecs,* París, Klincksieck,1958-59.

R. NETZ, *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: a Study in Cognitive History,* Cambridge, Cambridge University Press, 2000.

O. NEUGEBAUER, *A history of ancient mathematical astronomy,* Nueva York, 1975.

PAPO DE ALEJANDRÍA, *Collectionis quae supersunt,* ed. F. HULTSCH, Amsterdam 1965.

J. REY PASTOR y J. BABINI, *Historia de la Matemática* (vol. 1: *De la Antigüedad a la Baja Edad Media),* Barcelona, Gedisa, 1985.

P. L. ROSE, *The italian renaissance of mathematics: studies on humanists and mathematicians from Petrarch to Galileo,* Ginebra, 1975.

I. SCHNEIDER, *Archimedes: Ingenieur, Naturwissenchaftler und Mathematiker,* Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1979.

E. S. STAMATIS, «Αρχιμηδεια» I, *Πλάτων* 19 (1967).

—, «Tà kavstikà kátoptra tou Archimédous, avec une bibliographie des œuvres de l'auteur». Atenas, *Paraschou* 3 (1982), 39 págs.

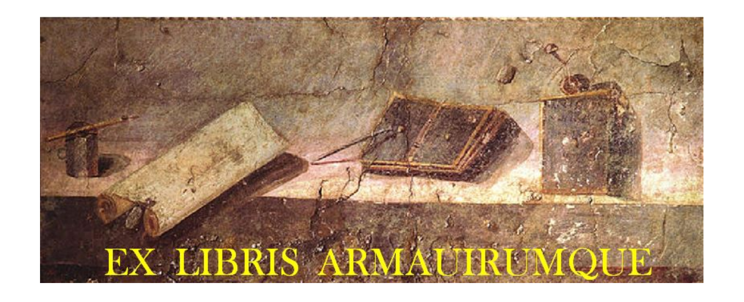
P. TANNERY, *Mémoires scientifiques,* (J. L. Heiberg y H. C. Zeuthen, eds.), París 1912.

P. THUILLIER, *De Arquímedes a Einstein. Las caras ocultas de la invención científica,* 2 vols., Madrid, Alianza, 1990.

B. VITRAC, «À propos de la chronologie des œuvres d'Archimède», en GUILLAUMIN, J.-Y. (ed.): *Mathématiques dans l'Antiquité,* Mémoires du centre Jean Palerne num. 11, Saint-Étienne, Publications de l'Université de Saint-Étienne, 1992.

N. G. WILSON, *Scholars of Byzantium,* Londres, Duckworth,1983.

—, «Archimedes: the Palimpsest and the Tradition» *Byzantinische Zeitschrift* 92, 1 (1999), 89-101.



ARQUÍMEDES

SOBRE LA ESFERA Y EL CILINDRO

INTRODUCCIÓN

La obra que hoy conocemos bajo el título de *Sobre la esfera y el cilindro* y que consideramos formada por dos libros no fue concebida por Arquímedes como un tratado único[1], como ponen de relieve las cartas que preceden a cada uno. El primero de ellos, el Libro I, responde a la intención de Arquímedes de dar a conocer a la comunidad alejandrina sus estudios sobre ciertos «teoremas dignos de mención» de los que se estuvo ocupando después de haberle enviado a Dosíteo los relativos a la cuadratura de la parábola, es de contenido fundamentalmente teórico y tiene por objeto estudiar las propiedades métricas fundamentales de la esfera y el casquete esférico, que el propio Arquímedes resume con el estilo sencillo, directo y conciso característico de sus cartas: primero, que la superficie de toda esfera es el cuádruple del círculo máximo de los que hay en ella; luego, que la superficie de todo casquete esférico es igual a la del círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete a la circunferencia del círculo que sirve de base al casquete; además de éstos, que en toda esfera, el cilindro que tiene su base igual al círculo máximo de los de la esfera

[1] Así lo ha puesto de relieve NETZ, *op. cit.*, págs. 18-19 y 25.

y una altura igual al diámetro de la esfera, es él mismo una vez y media la esfera y su superficie una vez y media la de la esfera.

El Libro II, por su parte, fue redactado por Arquímedes para responder a una petición de Dosíteo y recoge las «demostraciones de unos problemas» que Arquímedes había enviado previamente a Conón sin resolver. En su respuesta, Arquímedes adelanta a Dosíteo que «la mayor parte de ellas 〈scil., «de las demostraciones»〉 se redactan por medio de los teoremas cuyas demostraciones te mandé antes: que la superficie de la esfera entera es el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera y que la superficie de todo casquete esférico es igual a un círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete hasta la circunferencia de la base y que en toda esfera el cilindro que tiene por base el círculo máximo de los de la esfera y la altura igual al diámetro de la esfera es él mismo, en magnitud, una vez y media la esfera, y su superficie es una vez y media la superficie de la esfera, y que todo sector sólido es igual al cono que tiene por base un círculo igual a la superficie del casquete de esfera del sector y la altura igual al radio de la esfera».

Probablemente esa coincidencia de fondo en los contenidos fue la que hizo que desde la Antigüedad —aunque no podemos precisar mucho las fechas— hayan sido considerados como dos partes de un todo y se hayan transmitido conjuntamente: Eutocio los conoció ya en esas condiciones, y sus *Comentarios* a estos escritos incluyen las expresiones «Libro I» y «Libro II».

El Libro I, que comprende 44 proposiciones, ofrece una estructura clara en la que podemos distinguir dos partes, la primera de carácter introductorio y la segunda centrada en los teoremas fundamentales objeto de estudio. La parte in-

troductoria está formada por la carta ya mencionada, seis definiciones y cinco postulados de carácter axiomático —que siguen despertando la admiración de los matemáticos por su sencillez y su genialidad— más las proposiciones 1-22. La proposición 1 completa los asertos de la parte axiomática; las proposiciones 2-6 se ocupan de problemas de construcción de líneas o figuras desiguales que guarden entre sí una proporción menor que la que guardan entre sí otras figuras desiguales dadas; las proposiciones 7-12 comparan las áreas parciales —laterales o no— de conos y cilindros con las de pirámides o paralelepípedos semiinscritos o semicircunscritos a ellos[2]; las proposiciones 13-20 se ocupan de la medida de conos, cilindros y rombos sólidos[3]: áreas laterales del cono, el cilindro y el tronco de cilindro en relación con los círculos que les sirven de base, volumen del rombo sólido y de ciertas figuras cónicas derivadas del mismo; 21 y 22 estudian la proporcionalidad de las cuerdas trazadas de determinada manera en el polígono inscrito en el círculo y en el segmento circular en relación con el diámetro del círculo o la altura del segmento. Todas estas proposiciones tienen en mayor o menor medida carácter instrumental a efectos de lo

[2] Somos conscientes de estar empleando un neologismo para describir las figuras con las que Arquímedes trabaja. Por ejemplo: una pirámide «semicircunscrita» se obtendría seccionando verticalmente el cono mediante un plano que pase por su vértice y usando el triángulo resultante como uno de los lados de la pirámide, la cual se completa con los triángulos construidos sobre tangentes —que han de cortarse entre sí— al círculo que sirve de base al cono; la semiinscrita se completaría, tras la sección del cono, construyendo triángulos sobre cuerdas del círculo que sirve de base al cono, cuerdas que han de cortarse entre sí en un punto de la circunferencia de dicho círculo.

[3] El *rombo sólido* es la figura formada por dos conos que tienen como base el mismo círculo, cuyos ejes están en la misma recta y cuyos vértices están cada uno a un lado del círculo que les sirve de base.

tratado en la segunda parte, que es la que contiene las cuestiones fundamentales del tratado: en 23-34 se demuestra que la superficie de la esfera es igual al cuádruple del círculo máximo de la misma y que el volumen de la esfera es el cuádruple del cono que tiene por base su círculo máximo y por altura el radio de la esfera; para ello se recurre a la comparación entre la esfera y los sólidos inscritos o circunscritos a ella generados por revolución de un polígono regular y de número par de lados o por revolución de un polígono regular cuyo número de lados sea múltiplo de cuatro; las proposiciones 35-44 estudian por el mismo método lo relativo a los casquetes esféricos y al sector esférico.

Si los resultados obtenidos en este Libro I fueron el mayor motivo de orgullo para Arquímedes —recuérdese que pidió que fueran inscritos en su tumba—, lo que más admiración despierta entre los matemáticos es el elevado grado de generalización que alcanza en los axiomas.

En el Libro II encontramos seis problemas —las proposiciones 1, 3, 4, 5, 6 y 7— y tres teoremas —las proposiciones 2, 8 y 9—. En los teoremas estudia el volumen del casquete esférico (prop. 2) y la aproximación a la razón en volumen de los casquetes cortados en una esfera mediante un plano que no pase por el centro (prop. 8) y demuestra que, a igualdad de superficie, el hemisferio es el mayor de los segmentos posibles en la esfera (prop. 9). En cuanto a los problemas, la prop. 1 tiene por objeto construir una esfera igual a un cono o un cilindro dado, y las restantes se ocupan de la obtención de casquetes esféricos que cumplan determinadas condiciones de igualdad o proporcionalidad en superficie, en volumen o en ambas cosas.

Los resultados obtenidos en este Libro II son de trascendencia matemática mucho menor que los del Libro I, pero el desarrollo de las proposiciones es sumamente complejo. El

Comentario de Eutocio, que respecto al Libro I se compone en su mayor parte «de una colección de glosas mínimas que explican de modo selectivo detalles de la argumentación matemática», es en el caso del Libro II «es un trabajo muy meticuloso» que «se encuentra entre las obras más interesantes producidas por los comentaristas matemáticos de la antigüedad tardía»[4].

---

[4] Los entrecomillados proceden de NETZ, *op. cit.*, pág. 19.

LIBRO I

Arquímedes a Dosíteo, ¡salud! 12

De las proposiciones que había estudiado redacté y te envié antes con su demostración la de que todo segmento comprendido por una recta y una parábola es cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base y la misma altura que el segmento[1].

Como después se me ocurrieron teoremas dignos de mención, me he estado ocupando en sus demostraciones. Y son éstos: primero, que la superficie de toda esfera es el cuádruple del círculo máximo de los que hay en ella[2]; luego, que la superficie de todo casquete esférico es igual a la del círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete a la circunferencia del círculo que sirve de base al casquete[3]; además de éstos, que en toda esfera, el cilindro

---

[1] *Mét.* 1 y *Cuadr. Parab.* 17: «Todo segmento comprendido por una recta y una parábola es cuatro tercios del triángulo que tiene por base la misma que el segmento e igual altura».

[2] *Esf. cil.* I 30: «La superficie de una figura circunscrita en torno a la esfera es mayor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera».

[3] *Mét.* 7 y *Esf. cil.* I 40: «La superficie de la figura circunscrita en torno a un casquete es mayor que la del círculo cuyo radio es igual a la recta tra-

que tiene su base igual al círculo máximo de los de la esfera y una altura igual al diámetro de la esfera, es él mismo una vez y media la esfera y su superficie una vez y media la de la esfera[4].

Estas propiedades de las figuras mencionadas existían desde antes en la naturaleza, pero eran desconocidas por
4 quienes se dedicaron a la geometría antes que nosotros, porque a ninguno se le ocurrió que hubiera una conmensurabilidad entre estas figuras. Por ello yo no dudaría en comparar estas proposiciones con las estudiadas por otros geómetras y entre ellas, con las de Eudoxo relativas a los cuerpos sólidos, que parecen tan sobresalientes: la de que toda pirámide es un tercio del prisma que tiene la misma base que la pirámide e igual altura, y que todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base que el cono e igual altura[5]. Aunque por naturaleza estas figuras tenían desde antes estas propiedades y aunque habían existido antes de Eudoxo muchos geómetras dignos de mención, ocurrió que fueron ignoradas por todos y que ninguno cayó en la cuenta. Quienes estén capacitados podrán examinarlas. Hubiera yo debido publicarlas en vida de Conón, pues le consideraba especialmente capaz de meditar sobre ellas y emitir un juicio

---

zada desde el vértice del casquete hasta la circunferencia del círculo que sirve de base al casquete».

[4] *Mét.* 2 y *Esf. cil.* I 34, corol.: «Todo cilindro que tiene por base un círculo máximo de los de la esfera y la altura igual al diámetro de la esfera es una vez y media la esfera y su superficie, incluidas las bases, es una vez y media la superficie de la esfera».

[5] No se nos conservan los textos correspondientes de Eudoxo, pero los enunciados y sus demostraciones fueron recogidos por Euclides, respectivamente en *Elementos* XII 7, corolario: «Toda pirámide es la tercera parte del prisma que tiene la misma base que ella e igual altura» y *Elementos* XII 10: «Todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base que él e igual altura».

adecuado; considerando que es conveniente comunicarlas a los familiarizados con las matemáticas, he redactado para enviártelas las demostraciones sobre las que podrán investigar quienes se dedican a las matemáticas.

Que sigas bien.

Van primero las definiciones y postulados para las demostraciones.

DEFINICIONES 6

1. En el plano hay algunas líneas curvas finitas que o bien están enteras por el mismo lado de las rectas que unen sus extremos o bien no tienen ningún punto por el otro lado.
2. Llamo cóncava por el mismo lado a una línea tal que si en ella tomamos dos puntos cualesquiera, las rectas entre esos puntos o bien caen enteras hacia el mismo lado de la línea o bien una parte hacia el mismo lado y otra sobre la propia línea, pero ninguna hacia el otro lado.
3. Igualmente existen también superficies finitas que no están situadas ellas mismas en un plano, pero tienen sus extremos en un plano, las cuales estarán o bien enteras hacia el mismo lado del plano en el que tienen sus extremos o bien no tendrán ninguna parte hacia el otro lado.
4. Y llamo cóncavas hacia el mismo lado a superficies tales que, si se toman dos puntos en ellas, las rectas entre esos puntos caen o bien enteras hacia el mismo lado de la superficie o bien una parte hacia el mismo lado y otra sobre la propia superficie, pero ninguna hacia el otro lado.

5. Cuando un cono que tiene su vértice en el centro de una esfera corta a la esfera, llamo sector sólido a la figura comprendida por la superficie del cono y la superficie de la esfera en el interior del cono.
6. Cuando dos conos que tienen la misma base tengan los vértices cada uno a un lado del plano de la base de manera que sus ejes estén situados en línea recta, llamo rombo sólido a la figura sólida compuesta por ambos conos.

8 POSTULADOS

Postulo lo siguiente:

1. De las líneas que tienen los mismos extremos la recta es la más corta[6].

[6] Aunque matemáticos de la talla de PROCLO (pág. 110 FRIEDLEIN), seguidos de autores como HEATH *(The Works of Archimedes,* 3) y una larga tradición matemática (presente en los libros de texto hasta hace bien poco) han considerado la presente una «definición», no debemos dejar de hacer notar que el texto griego parece indicar que Arquímedes lo presenta como un postulado, ya que el verbo que introduce la frase es *lambánō* («asumo»). La presencia del subtítulo «postulados» es argumento de menos peso, puesto que tal subtítulo, así como la numeración de los «postulados» no figura en los manuscritos, sino que es obra de Torelli. Los griegos conocieron varias definiciones de la recta. La definición euclidiana, de carácter geométrico, «Línea recta es la que yace por igual respecto a los puntos que hay en ella» *(Elementos* I def. 4) —precedida en I, def. 2 de la definición de línea como «longitud sin anchura»—; la platónica «Recto es aquello cuyo medio está enfrente de ambos extremos», de carácter óptico *(Parménides* 137e); y la de Arquímedes que figura en este texto, de carácter físico y la única que puede ser sometida a prueba. Cf. el amplísimo comentario de HEATH a las definiciones euclidianas mencionadas en *The Thirteen Books of the Elements,* 3 vols., Nueva York, 1956^{2rp}, vol. I, págs. 158-165 y 165-169, y CH. MUGLER, «Sur l'histoire de quel-

2. De las otras líneas, si estando en un plano tienen los mismos extremos, tales líneas son desiguales, siempre que ambas sean cóncavas hacia el mismo lado y o bien una de ellas esté completamente comprendida por la otra y la recta que tiene los mismos extremos que ella, o bien una parte esté comprendida y otra parte sea común; y la línea comprendida es menor.
3. De modo semejante, de las superficies que tienen los mismos extremos, si tienen los extremos en un plano, la menor es el plano.
4. De las otras superficies que también tienen los mismos extremos, si los extremos están en un plano, tales superficies son desiguales, puesto que si ambas superfi-

---

ques définitions de la géométrie grecque et les rapports entre la géométrie et l'optique», *L'Antiquité Classique* 26 (1957), 331-345. En español puede verse EUCLIDES, *Elementos* I, def. 4 (traducción y nota de M. L. PUERTAS en B. C. G., 155). La prueba nos la ofrece EUTOCIO, *Coment.*, 6 recurriendo a EUCLIDES I 20: «En todo triángulo, dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante» y está expresada como sigue: «Sea en un plano un segmento de recta AB, y otra línea AΓB que tenga los mismos extremos A, B. Pide que se le acepte que AB es menor que AΓB. Afirmo que lo que postulaba era cierto. Tómese en la recta AΓB un punto al azar Γ y trácense AΓ, ΓB. Es evidente que la suma de AΓ, ΓB es mayor que AB *[Elem. I 20]*. Tómense de nuevo en la línea AΓB dos puntos al azar Δ, E, y trácense AΔ, ΔΓ, ΓE, EB. De modo semejante, también aquí es evidente que la suma de las dos líneas AΔ, ΑΓ es mayor que AΓ, y que la suma de las dos líneas ΓE, EB es mayor que ΓB. De manera que la suma de las líneas AΔ, ΔΓ, ΓE, EB es mucho mayor que AB. De manera semejante, si tomamos otros puntos entre los ya tomados y trazamos rectas que unan los recién tomados, hallaremos que éstas siguen siendo mayores que AB, y haciendo esto repetidamente hallaremos que las rectas que más se aproximan a la línea ABΓ son aún mayores. A partir de esto es evidente que esta recta es mayor que AB, ya que es posible, trazando rectas ⟨desde los extremos⟩ hasta cualquiera de sus puntos, tomar una línea compuesta de rectas tal que se demuestre, mediante los mismos razonamientos, que ella misma es mayor que AB».

cies fueran cóncavas hacia el mismo lado, o bien una superficie estará comprendida entera por la otra y por el plano que tiene los mismos extremos que ella, o bien una parte estará comprendida y otra la tendrá en común; y la superficie comprendida será menor.

5. Y además, en las líneas desiguales y las superficies desiguales y los sólidos desiguales el mayor excede al menor en una magnitud tal que, añadida a sí misma, es capaz de exceder cualquier magnitud propuesta de las que decimos que guardan razón[7].

Supuesto esto, si se inscribe un polígono en un círculo, es evidente que el perímetro del polígono inscrito es menor que la circunferencia del círculo, pues cada uno de los lados del polígono es menor que el arco de circunferencia del círculo cortado por él.

---

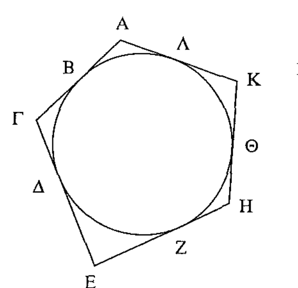
[7] El sentido de las últimas palabras de este postulado *(tôn pròs állēla legoménōn)* se ha tenido, en general, por poco claro, como prueban las distintas traducciones que se han dado. Cf. Dijsterhuis, *op. cit.,* págs. 146-149, en donde aparecen recogidas y comentadas las diversas versiones. Sin embargo, la expresión coincide exactamente con la empleada por Euclides en *Elementos* V, def. 4 («Se dice que guardan relación entre sí —*pròs állēla échein*— las magnitudes que al multiplicarse pueden exceder la una a la otra»), por lo que entiendo que la interpretación, se traduzcan los pasajes como se traduzcan, debe ser la misma para ambos. De hecho, independientemente de la cuestión de la literalidad, este postulado se ha interpretado siempre como una extensión de ese principio, atribuido, como el resto del contenido del libro V de los *Elementos*, a Eudoxo. Para Dijksterhuis, sin embargo, se trata también del rechazo de ciertos métodos útiles como herramientas heurísticas, pero matemáticamente poco rigurosos, y piensa que hay que interpretar este quinto postulado en el sentido que sigue: «si dos magnitudes satisfacen el axioma de Eudoxo una respecto a la otra, también su diferencia satisface ese postulado respecto a cualquier magnitud de la misma especie homogénea con ambas».

Proposición 1

Si se circunscribe un polígono a un círculo, el perímetro del polígono circunscrito es mayor que el perímetro del círculo.

Circunscríbase al círculo el polígono supuesto.

Digo que el perímetro del polígono es mayor que el perímetro del círculo.



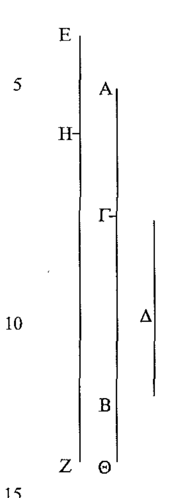
Puesto que la suma de BAΛ es mayor que el arco de circunferencia BΛ, ya que comprende el arco de circunferencia que tiene los mismos extremos [Post. 2] e, igualmente, la suma de ΔΓ, ΓB es mayor que el arco ΔB, y la suma de ΛK, KΘ mayor que el arco ΛΘ, y la suma de ZHΘ mayor que el arco ZΘ y, también la suma de ΔE, EZ mayor que el arco ΔZ, entonces el perímetro entero del polígono es mayor que el perímetro del círculo.

Proposición 2

Dadas dos magnitudes desiguales es posible hallar dos rectas desiguales de modo que la recta mayor guarde con la menor una razón menor que la magnitud mayor con la menor.

Sean AB, Δ dos magnitudes desiguales y sea mayor AB.

12 Digo que es posible hallar dos rectas desiguales que cumplan la indicación dada.



Póngase, según la segunda proposición del Libro I de Euclides [*Elem.* I 2], la magnitud BΓ igual a Δ y póngase una línea recta, ZH; la magnitud ΓA sumada a sí misma excederá de Δ [Post. 5]. Multiplíquese entonces y sea AΘ, y cuantas veces es múltiplo AΘ de AΓ, otras tantas veces sea múltiplo ZH de HE.

Por tanto, ΘA es a AΓ como ZH a HE [*Elem.* V 15]; y por inversión [*Elem.* V 7, cor.], EH es a HZ como AΓ es a AΘ. Y puesto que AΘ es mayor que Δ —es decir, que ΓB—, entonces ΓA guarda con AΘ una razón menor que la de ΓA con ΓB [*Elem.* V 8]. Pero ΓA es a AΘ como EH a HZ; luego EH guarda con HZ una razón menor que la de ΓA con ΓB; y por composición [*Elem.* V, def. 14], EZ guarda con ZH una razón menor que AB con BΓ[8]. Y BΓ es igual a Δ; luego EZ guarda con ZH una razón menor que AB con Δ.

Luego han sido halladas dos rectas desiguales que cumplen la indicación dada[9].

[8] [*Por el lema*], añaden los manuscritos; mas si alguna vez existió tal lema, no se nos ha transmitido; PAPO (HULTSCH, II, 684) y EUTOCIO (16, 11-18, 22) demuestran el aserto.

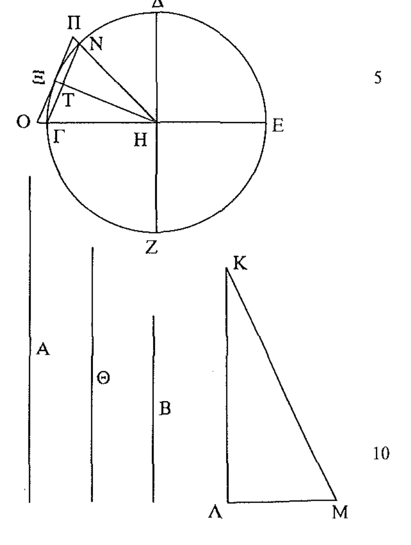
[9] [*Es decir, que la mayor guarda con la menor una razón menor que la magnitud mayor con la menor*].

Proposición 3

Dadas dos magnitudes desiguales y un círculo, es posible inscribir en el círculo un polígono y circunscribir otro de modo que el lado del polígono circunscrito guarde con el lado del polígono inscrito una razón menor que la magnitud mayor con la menor.

Sean A, B las dos magnitudes dadas, y el círculo dado, el 14
supuesto.

Digo que es posible cumplir la indicación.



Hállense dos rectas, Θ, KΛ, de las cuales sea Θ la mayor, de manera que Θ guarde con KΛ una razón menor que la magnitud mayor con la menor [Prop. 2], y desde Λ trácese ΛM perpendicular a ΛK [*Elem.* I 11] y desde K trácese KM igual a Θ[10], y trácense dos diámetros del círculo mutuamente perpendiculares, ΓE, ΔZ.

Al cortar por la mitad el ángulo comprendido por ΔHΓ, y la mitad de éste por la mitad, y obrando así sucesivamente, dejaremos un ángulo menor que el doble del com-

[10] [*Pues esto es posible*].

prendido por ΛΚΜ. Dejémoslo, y sea el comprendido por ΝΗΓ, y trácese la recta ΝΓ. Entonces, ΝΓ es el lado de un polígono equilátero [11].

Y córtese por la mitad el ángulo comprendido por ΓΗΝ mediante la recta ΗΞ, y desde el punto Ξ trácese ΟΞΠ tangente al círculo, y prolónguense las rectas ΗΝΠ, ΗΓΟ. De modo que también ΠΟ es el lado del polígono circunscrito al círculo, también equilátero. Puesto que el ángulo comprendido por ΝΗΓ es menor que el doble del ángulo comprendido por ΔΚΜ, y es el doble del comprendido por ΤΗΓ, entonces el comprendido por ΤΗΓ es menor que el comprendido por
16 ΛΚΜ. Y los ángulos de vértice en Λ, Τ son rectos. Entonces ΜΚ guarda con ΛΚ una razón mayor que ΓΗ con ΗΤ. Y ΓΗ es igual a ΗΞ; de manera que ΗΞ guarda con ΗΤ —es decir, ΠΟ con ΝΓ— una razón menor que ΜΚ con ΚΛ. Y además, ΜΚ guarda con ΚΛ una razón menor que Α con Β[12]. Y ΠΟ es el lado del polígono circunscrito, y ΓΝ el del inscrito.

Que es lo que se había propuesto hallar.

Proposición 4

Habiendo de nuevo dos magnitudes desiguales y un sector, es posible circunscribir un polígono al sector e inscribir otro, de manera que el lado del circunscrito guarde con

---

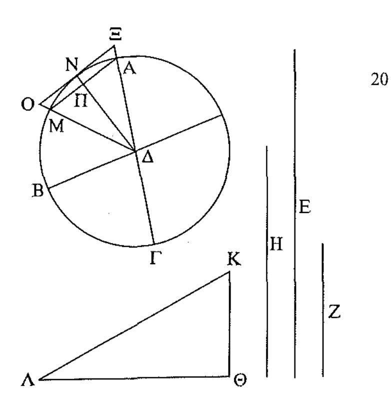
[11] [*Puesto que el ángulo comprendido por ΝΗΓ medirá al comprendido por ΔΗΓ, que es recto, y entonces el arco ΝΓ medirá a ΓΔ, que es un cuarto de círculo; de manera que también medirá al círculo. Luego es el lado de un polígono equilátero, pues esto es evidente*]. En Eut. 18, 29-30, esta expresión figura como «de un polígono equilátero de número par de lados».

[12] Por hipótesis, Θ : ΚΛ < Α : Β, y por construcción ΜΚ = Θ.

el lado del inscrito una razón menor que la magnitud mayor con la menor.

Sean de nuevo dos magnitudes desiguales E, Z, de las cuales sea E la mayor, y un círculo ABΓ que tenga por centro Δ; y constrúyase en el punto Δ el sector AΔB.

Hay que circunscribir un polígono e inscribir otro en el sector ABΔ, que tenga sus lados iguales excepto BΔ, ΔA, de modo que se cumpla la indicación.



Hállense dos rectas desiguales H, ΘK, y sea mayor H, de manera que H guarde con ΘK una razón menor que la que guarda la magnitud mayor con la menor [Prop. 2][13]; y trazada desde el punto Θ una perpendicular a KΘ del mismo modo [Prop. 3], prolónguese KΛ hasta que sea igual a H[14]. Una vez cortado por la mitad el ángulo comprendido por AΔB, y cortada su mitad por la mitad y hecho esto sucesivamente, quedará un ángulo que sea menor que el doble del comprendido por ΛKΘ. Quede, pues, el ángulo AΔM; entonces AM resulta ser el lado del polígono inscrito en el círculo. 18

Y si cortamos por la mitad el ángulo comprendido por AΔM mediante la recta ΔN y trazamos desde N la recta ΞNO tangente al círculo, ésta será el lado del polígono circunscrito al mismo círculo y semejante al polígono indicado. Y de

[13] *[Pues esto es posible].*

[14] *[Es posible, puesto que H es mayor que ΘK].*

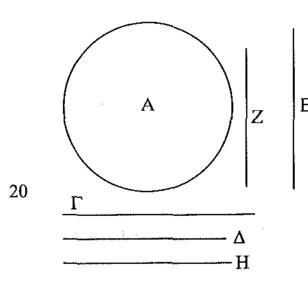
modo semejante a lo dicho antes [Prop. 3], ΞO guarda con AM una razón menor que la magnitud E con la magnitud Z.

PROPOSICIÓN 5

Dado un círculo y dos magnitudes desiguales, circunscribir al círculo un polígono e inscribir otro de manera que el circunscrito guarde con el inscrito una razón menor que la magnitud mayor con la menor.

Póngase el círculo A y dos magnitudes desiguales E, Z, y sea E la mayor.

Es preciso inscribir un polígono en el círculo y circunscribir otro, de modo que se cumpla lo indicado.



Tomo dos rectas desiguales, Γ, Δ, de las cuales sea Γ la mayor, de manera que Γ guarde con Δ una razón menor que E con Z [Prop. 2]. Y si se toma H como media proporcional de Γ, Δ [*Elem.* VI 13], entonces Γ será mayor que H. Circunscríbase al círculo un polígono e inscríbase otro de manera que el lado del polígono circunscrito guarde con el del inscrito una razón menor que Γ con H[15] [Prop. 3].

Por eso precisamente la razón de los cuadrados es menor que la razón de los cuadrados[16]. Y la razón del polígono

[15] [*Como acabamos de aprender*].

[16] Es decir: «la razón del cuadrado del lado del polígono circunscrito con el cuadrado del lado del polígono inscrito es menor que la razón del cuadrado de lado Γ con el cuadrado de lado H», dado que, por construcción, Γ : Δ < E : Z.

al polígono es la razón del cuadrado del lado al cuadrado del lado [*Elem.* VI 20][17]: la de Γ con Δ, cuadrado de la de Γ con H.

Luego el polígono circunscrito guarda con el inscrito una razón menor que la de Γ con Δ; luego con más razón el circunscrito guarda con el inscrito una razón menor que la de E con Z.

Proposición 6[18]

De la misma manera demostraremos que *dadas dos magnitudes desiguales y un sector, es posible circunscribir al sector un polígono e inscribir otro semejante a él, de manera que el circunscrito guarde con el inscrito una razón menor que la magnitud mayor con la menor*[19].

* * *

Y también esto es evidente: *si se da un círculo o un sector y un área, y se inscribe en el círculo o el sector un polígono equilátero y se repite la operación en los segmentos que quedan, es posible dejar unos segmentos del círculo o sector que sean menores que el área propuesta.* Esto se nos ha transmitido en los *Elementos*[20].

---

[17] [*Pues son semejantes*].

[18] La presente es una proposición anómala en cuanto a la forma en la que se reúnen varios enunciados de fácil demostración según el método empleado en las proposiciones 2 a 5 y otro más que sí requiere de explicación.

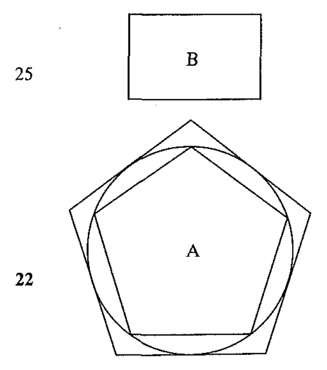
[19] Cf. Prop. 4.

[20] La literalidad de la frase parece dar a entender que la demostración de este enunciado figurase ya en los *Elementos*. Lo que allí encontramos es que en *Elem.* X 1 se demuestra que «*Dadas dos magnitudes desiguales,*

* * *

Se ha de demostrar también que, *dado un círculo o un sector y un área, es posible circunscribir un polígono al círculo o al sector de modo que los segmentos que quedan después de circunscribir sean menores que el área dada. Y tras demostrarlo en el caso del círculo cabrá traspasar el mismo razonamiento también al caso del sector.*

Sean dados un círculo A y un área B.



Es posible circunscribir un polígono al círculo, de manera que los segmentos que queden entre el círculo y el polígono sean menores que el área B.

Pues habiendo dos magnitudes desiguales —mayor la suma del área y el círculo, menor el círcu-
22 lo— circunscríbase al círculo un polígono e inscríbase otro de manera que el circunscrito guarde con el inscrito una razón menor que la indicada magnitud mayor con la menor [Prop. 5]. Este polígono circunscrito es

---

si de la mayor se quita una parte mayor que su mitad y del resto se quita una parte mayor que su mitad y se procede así repetidamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor propuesta». Esa proposición se utiliza en *Elem.* XII 2, en donde se recurre a ese método al efecto de demostrar que «*Los círculos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus diámetros*». Allí podemos leer que «*si se dividen por la mitad los arcos que van quedando y trazamos rectas que unan sus extremos y actuamos así repetidamente, dejaremos unos segmentos de círculo menores que el exceso en que excede el círculo* EZHΘ *al área* Σ».

tal que las áreas que quedan en torno[21] son menores que el área propuesta B.

Si el polígono circunscrito guarda con el inscrito una razón menor que la suma del círculo y el área B con el propio círculo, y el círculo es mayor que el polígono inscrito, entonces con más razón el polígono circunscrito guarda con el círculo una razón menor que la suma del círculo y el área B con el propio círculo [*Elem.* V 10]; y, por descomposición [*Elem.* V, def. 15], los restos del polígono circunscrito guardan con el círculo una razón menor que el área B con el círculo.

Luego los restos del polígono circunscrito son menores que el área B [*Elem.* V 10].

O así[22]: puesto que el polígono circunscrito guarda con el círculo una razón menor que la suma del círculo y el área B con el círculo, por eso precisamente el polígono circunscrito será menor que la suma. De modo que también ⟨la suma de⟩ todos los restos será menor que el área B.

Y de modo semejante en el caso del sector.

---

[21] Se refiere a las áreas que quedan entre el polígono y el círculo en torno al cual está circunscrito.

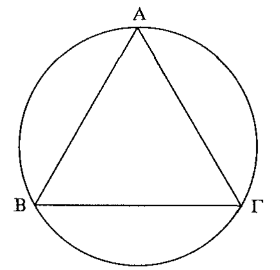
[22] La doble demostración para este enunciado es otra de las anomalías de esta proposición; Eutocio conoció la segunda de ellas, pues es la que cita en su *Comentario*.

Heiberg (vol. I, pág. 23) considera improbable que las dos soluciones procedan de Arquímedes, y sugiere una solución única, cuya traducción sería «*El polígono circunscrito guarda con el inscrito una razón menor que la de la suma del círculo y el área B con el círculo. Por ello precisamente el polígono circunscrito es menor que la suma de ambos; de manera que también los restos son menores que el área B*».

24 PROPOSICIÓN 7

Si en un cono isósceles se inscribe una pirámide de base equilátera, la superficie de ésta, excluida la base, es igual a un triángulo que tenga su base igual al perímetro de la base y por altura la perpendicular trazada desde el vértice hasta un lado de la base.

Sea un cono isósceles cuya base sea el círculo ABΓ e inscríbase en él una pirámide que tenga la base equilátera ABΓ. Digo que la superficie de ésta sin la base es igual al triángulo dicho.



Puesto que el cono es isósceles y la base de la pirámide es equilátera, las alturas de los triángulos que contienen la pirámide son iguales entre sí. Y esos triángulos tienen por bases las rectas AB, BΓ, ΓA y por altura, la dicha. De manera que los triángulos son iguales a un triángulo que tenga por base una recta igual a ⟨la suma de⟩ AB, BΓ, ΓA, y por altura, la recta dicha [*Elem.* VI 1][23].

[23] [*Es decir, que es la superficie de la pirámide sin el triángulo ABΓ*].

[DEMOSTRACIÓN DE OTRA MANERA, DE MAYOR CERTEZA[24]

Sea un cono isósceles cuya base sea el círculo ΑΒΓ y su vértice el punto Δ, e inscríbase en el cono una pirámide que tenga por base el triángulo equilátero ΑΒΓ, y trácense las rectas ΔΑ, ΔΓ, ΔΒ.

Digo que ⟨la suma de⟩ los triángulos ΑΔΒ, ΑΔΓ, ΒΔΓ es igual al triángulo cuya base sea igual al perímetro del triángulo ΑΒΓ y la perpendicular trazada desde el vértice hasta la base sea igual a la perpendicular trazada de Δ hasta ΒΓ.

26 Trácense las perpendiculares ΔΚ, ΔΑ, ΔΜ; éstas son, por tanto, iguales entre sí. Y sea un triángulo ΕΖΗ que tenga su base ΕΖ igual al perímetro del triángulo ΑΒΓ y la altura ΗΘ igual a ΔΛ.

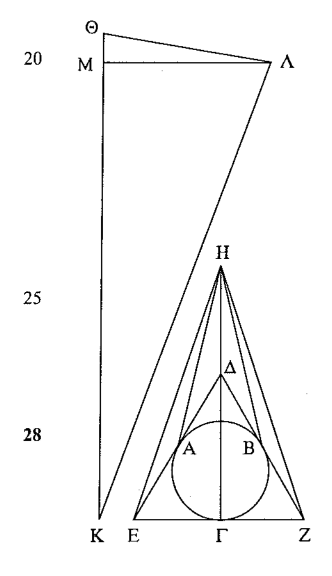
Puesto que el paralelogramo comprendido por ΒΓ, ΔΛ es el doble del triángulo ΔΒΓ [*Elem.* I 41], también el comprendido por ΑΒ, ΔΚ es el doble del triángulo ΑΒΔ, y el comprendido por ΑΓ, ΔΜ es el doble del triángulo ΑΔΓ; luego el

[24] Esta segunda demostración no puede ser original de Arquímedes: si, en efecto, éste la hubiera considerado «de mayor certeza», no habría incluido la anterior.

paralelogramo comprendido por el perímetro del triángulo ΑΒΓ —esto es, ΕΖ— y por ΔΛ —esto es, ΗΘ— es el doble de los triángulos ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΔΓ. Y el paralelogramo comprendido por ΕΖ, ΗΘ es el doble del triángulo ΕΖΗ [*Elem.* I 41]; luego el triángulo ΕΖΗ es igual a ⟨la suma de⟩ los triángulos ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΔΓ.]

Proposición 8

Si se circunscribe una pirámide a un cono isósceles, la superficie de la pirámide, excluida la base, es igual a la de un triángulo que tenga por base una recta igual al perímetro de la base y por altura la generatriz del cono.



Sea un cono cuya base sea el círculo ΑΒΓ y circunscríbase una pirámide de manera que su base, esto es, el polígono ΔΕΖ, esté circunscrito al círculo ΑΒΓ.

Digo que la superficie de la pirámide, excluida la base, es igual al triángulo dicho.

Puesto que[25] las rectas trazadas desde el centro del círculo hasta los puntos de tangencia son perpendiculares a las tangentes [*Elem.*
28 III 18], entonces también las rectas trazadas desde el vértice del cono hasta los puntos de tangencia con las rectas ΔΕ, ΖΕ, ΖΔ son perpendi-

[25] [*El eje del cono es perpendicular a la base, es decir, al círculo ΑΒΓ, y*].

culares a ellas[26]. Por tanto, las perpendiculares mencionadas HA, HB, HΓ son iguales entre sí, pues son generatrices del cono.

Sea el triángulo ΘΚΛ que tiene el lado ΘΚ igual al perímetro del triángulo ΔΕΖ y la perpendicular ΛΜ igual a ΗΑ.

Puesto que el paralelogramo comprendido por ΔΕ, ΑΗ es el doble del triángulo ΕΔΗ [*Elem.* I 41], y el comprendido por ΔΖ, ΗΒ es el doble del triángulo ΔΖΗ, y el comprendido por ΕΖ, ΓΗ es el doble del triángulo ΕΗΖ, entonces el paralelogramo comprendido por ΘΚ y ΑΗ —esto es, ΜΛ— es el doble de ⟨la suma de⟩ los triángulos ΕΔΗ, ΖΔΗ, ΕΗΖ. Y además el paralelogramo comprendido por ΘΚ, ΛΜ es el doble del triángulo ΛΚΘ [*Elem.* I 41].

Por eso la superficie de la pirámide, excluida la base, es igual a un triángulo que tenga la base igual al perímetro de ΔΕΖ y por altura la generatriz del cono.

Proposición 9 30

Si en un cono isósceles una recta corta al círculo que es la base del cono y desde los extremos de la recta se trazan líneas rectas hasta el vértice del cono, el triángulo comprendido por la secante y las rectas trazadas hasta el vértice será menor que la superficie del cono que queda entre las líneas trazadas hasta su vértice.

[26] En Eut., 22, la frase presenta esta otra formulación: «... las rectas trazadas desde el vértice del cono hasta los puntos Α, Β, Γ son perpendiculares a ellas».

Sea el círculo ABΓ la base del cono isósceles, Δ su vértice, y trácese en su interior[27] una recta, AΓ, y desde el vértice hasta A, Γ trácense las rectas AΔ, ΔΓ.

Digo que el triángulo AΔΓ es menor que la superficie del cono que queda entre AΔΓ[28].

Córtese por la mitad el arco ABΓ por el punto B, y trácense AB, ΓB, ΔB; los triángulos ABΔ, BΓΔ serán mayores que el triángulo AΔΓ[29]. Sea Θ el área en que los triángulos indicados exceden al triángulo AΔΓ. Entonces, o bien Θ es menor que los segmentos AB, BΓ o no.

Primero, no sea menor.

Puesto que hay dos superficies —la superficie del cono que queda entre las líneas AΔB más el segmento AEB y la del triángulo AΔB— que tienen el mismo límite —el perímetro del triángulo AΔB—, será mayor la que comprenda a la otra que la comprendida por ella [Post. 4]. Luego la superficie

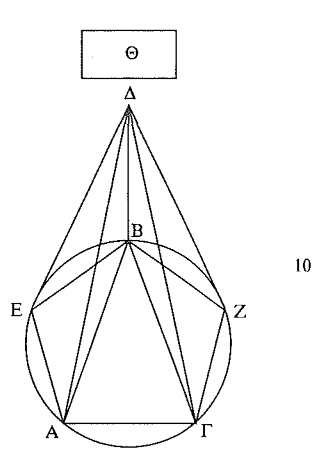
[27] Es decir, «en el interior del círculo base del cono».

[28] Se refiere a la superficie cónica *lateral* comprendida por las rectas AΔ, ΔΓ y el arco AΓ. Heiberg afirma que seguramente Arquímedes incluía esa precisión en el enunciado, como se desprende de la redacción que encontramos en el lugar correspondiente de la proposición 10 [34, 20].

[29] Eut. (24, 18 y ss.) ofrece la siguiente prueba: «Puesto que el ángulo de vértice en Δ es un ángulo sólido, la suma de los ángulos AΔB, BΔΓ es mayor que el ángulo AΔΓ [*Elem.* XI 20], y si trazamos desde el vértice hasta la mitad de la base la recta ΔE que sea perpendicular a AΓ, el ángulo AΔB será mayor que el AΔE. Constrúyase el ángulo AΔZ igual a AΔB, y trácese AZ una vez construida ΔZ igual a ΔΓ. Puesto que los lados son iguales dos a dos y también un ángulo a otro ángulo, también el triángulo ABΔ es igual al triángulo AΔZ [*Elem.* I 4], que es mayor que el AΔE. Luego también el triángulo ABΔ es mayor que el AΔE. E igualmente también el triángulo ΔBΓ mayor que el ΔEΓ. Luego la suma de los dos triángulos AΔB, BΔΓ es mayor que el triángulo AΔΓ». Dijksterhuis considera esta prueba insuficiente y ofrece una demostración basada, como la de Eutocio, en *Elem.* XI 20 («En todo ángulo diedro formado por tres ángulos planos la suma de dos de los ángulos planos es siempre mayor que el tercero»).

del cono que queda entre las rectas AΔB más el segmento AEB es mayor que el triángulo ABΔ. Igualmente, también la que queda entre las líneas BΔΓ más el segmento ΓZB es ma- 32 yor que el triángulo BΔΓ. Luego toda la superficie del cono junto con el área Θ es mayor que los triángulos mencionados. Y los triángulos mencionados son iguales al triángulo AΔΓ más el área Θ [por hipót.]. Réstese de ambos[30] el área Θ.

Entonces el resto de la superficie del cono que queda entre AΔΓ es mayor que el triángulo AΔΓ.



Sea ahora Θ menor que los segmentos AB, BΓ.

Si se cortan por la mitad los arcos AB, BΓ y se cortan por la mitad sus mitades, dejaremos segmentos que sean menores que el área Θ. Queden los segmentos correspondientes a las cuerdas AE, EB, BZ, ZΓ, y trácense las rectas ΔE, ΔZ.

De nuevo, según el mismo razonamiento [Post. 4], la superficie del cono que queda entre AΔE más el segmento correspondiente a la cuerda AE es mayor que el triángulo AΔE, y la que queda entre las líneas EΔB más el segmento correspondiente a la cuerda EB es mayor que el triángulo EΔB. Luego la superficie que queda entre AΔ, ΔB más los segmentos correspondientes a las cuerdas AE, EB es mayor que los triángulos AΔE, EBΔ. Puesto que los triángulos AEΔ, ΔEB son mayores que el triángulo ABΔ, como se ha demostrado, entonces la superficie del cono que queda entre AΔB y

[30] Se entiende «de ambos miembros de la igualdad».

los segmentos correspondientes a las cuerdas AE, EB será, con más razón, mayor que el triángulo AΔB. Por el mismo razonamiento, también la superficie que queda entre BΔΓ más los segmentos correspondientes a las cuerdas BZ, ZΓ es mayor que el triángulo BΔΓ. Luego toda la superficie que queda entre AΔΓ junto con los segmentos indicados es ma-
34 yor que los triángulos ABΔ, ΔBΓ. Y éstos son iguales al triángulo AΔΓ más el área Θ [por hipót.]. De entre estas superficies, los segmentos mencionados son menores que el área Θ [por const.]; luego la superficie comprendida entre las rectas AΔΓ es mayor que el triángulo AΔΓ.

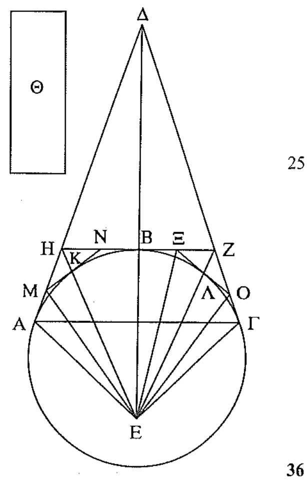
Proposición 10

Si al círculo que sirve de base a un cono[31] *se le trazan tangentes que estén en el mismo plano del círculo y que se corten unas a otras y desde los puntos de tangencia y de intersección mutua se trazan rectas hasta el vértice del cono, los triángulos comprendidos por las tangentes y las rectas trazadas hasta el vértice del cono son mayores que la superficie del cono comprendida por ellas.*

Sea un cono cuya base sea el círculo ABΓ y su vértice el punto E, y trácense AΔ, ΓΔ tangentes al círculo ABΓ y que estén en el mismo plano; y desde el punto E, que es el vértice del cono, trácense EA, EΔ, EΓ hasta los puntos A, Δ, Γ.

[31] Se ha de entender que se trata de un cono isósceles.

Digo que los triángulos ΑΔΕ, ΔΕΓ son mayores que la superficie cónica que queda entre las rectas ΑΕ, ΓΕ y el arco ΑΒΓ.



Una vez cortado por la mitad el arco ΑΒΓ por el punto Β trácese ΗΒΖ que sea tangente al círculo y paralela a ΑΓ; y desde los puntos Η, Ζ hasta Ε trácense las rectas ΗΕ, ΖΕ. Y puesto que la suma de ΗΔ, ΔΖ es mayor que ΗΖ [*Elem.* I 20], añádanseles en común[32] las rectas ΗΑ, ΖΓ. Entonces ⟨la suma de⟩ las rectas ΑΔ, ΔΓ enteras es mayor que ⟨la suma de⟩ las rectas ΑΗ, ΗΖ, ΖΓ. Y puesto que ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ son generatrices del cono, son iguales por tratarse de un cono isósceles. E igualmente son perpendiculares[33]; luego ⟨la suma de⟩ los triángulos ΑΕΔ, ΔΕΓ es mayor que ⟨la suma de⟩ los triángulos ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ [*Elem.* VI 1][34]. Sea Θ el área en que los triángulos ΑΕΔ, ΔΓΕ son mayores que los triángulos ΑΕΗ, ΗΕΖ,

---

[32] Es decir, «a los dos miembros de la desigualdad».

[33] [*Como queda demostrado en el lema*]. [*Y los paralelogramos comprendidos por las alturas y las bases son el doble que los triángulos*]. El lema no figura en los mss.; la demostración figura en el comentario de Eutocio a la proposición 8 (22, 23 y ss.).

[34] [*Porque ΑΗ, ΗΖ, ΖΓ son menores que ΓΔ, ΔΑ y sus alturas son iguales*]. [*Pues es evidente que la línea trazada desde el vértice del cono rectángulo hasta el punto de tangencia de la base es perpendicular a la tangente*].

ZEΓ. Y el área Θ o bien es menor que las áreas restantes[35] AHBK, BZΓΛ o no es menor.

Primero, no sea menor.

Puesto que son superficies compuestas —la de la pirámide que tiene por base el trapecio HAΓZ y por vértice el punto y la superficie cónica que queda entre las líneas AE, EΓ más el segmento ABΓ— y tienen por límite el mismo perímetro del triángulo AEΓ, es evidente que la superficie de la pirámide sin el triángulo AEΓ es mayor que la superficie cónica más el segmento ABΓ [Post. 4]. Quítese de ambas el segmento ABΓ; entonces los triángulos restantes AHE, HEZ, ZEΓ junto con los restos circundantes AHBK, BZΓΛ son mayores que la superficie cónica que queda entre AE, EΓ. Y el área Θ no es menor que las áreas que quedan circundantes AHBK, BZΓΛ [por hipótesis].

38 Luego los triángulos AHE, HEZ, ZEΓ junto con Θ serán con más razón mayores que la superficie cónica que queda entre AE, EΓ. Y los triángulos AHE, HEZ, ΓEZ junto con Θ son los triángulos AEΔ, ΔEΓ; luego los triángulos AEΔ, ΔEΓ serán mayores que la superficie cónica mencionada.

Sea ahora Θ menor que los restos circundantes.

Si del mismo modo circunscribimos repetidamente polígonos a los segmentos, al cortar por la mitad los arcos que quedan en torno y trazar las tangentes, dejaremos ciertos restos de áreas que serán menores que el área Θ. Déjense y sean AMK, KNB, BΞΛ, ΛOΓ, que son menores que el área Θ, y únanse con E.

De nuevo es evidente que ⟨la suma de⟩ los triángulos AHE, HEZ, ZEΓ será mayor que ⟨la suma de⟩ los triángulos AEM,

[35] Se refiere a las áreas comprendidas por los arcos del círculo que sirve de base al cono y la línea quebrada formada por cada dos tangentes consecutivas al cortarse.

MEN, NEΞ, ΞEO, OEΓ[36]. Y otra vez del mismo modo la pirámide que tiene por base el polígono AMNΞOΓ y por vértice E tiene una superficie mayor, sin el triángulo AEΓ, que la superficie cónica que queda entre AEΓ más el segmento ABΓ [Post. 4]. Quítese de ambos[37] el segmento ABΓ; entonces los triángulos restantes AEM, MEN, NEΞ, ΞEO, OEΓ junto con las áreas que quedan circundantes AMK, KNB, BΞΛ, ΛOΓ serán mayores que la superficie cónica que queda entre AEΓ. Pero el área Θ es mayor que las áreas circundantes mencionadas [por hipót.], y se ha demostrado que los triángulos AHE, HEZ, ZEΓ son mayores que los triángulos AEM, MEN, NEΞ, ΞEO, OEΓ.

Luego los triángulos AHE, HEZ, ZEΓ junto con el área Θ —es decir, los triángulos AΔE, ΔEΓ— son con más razón mayores que la superficie cónica comprendida por las rectas AEΓ.

Proposición 11

Si en la superficie de un cilindro recto hubiera dos rectas, la superficie del cilindro que queda entre las rectas es mayor que el paralelogramo comprendido por las rectas que están en la superficie del cilindro y las rectas que unen sus extremos.

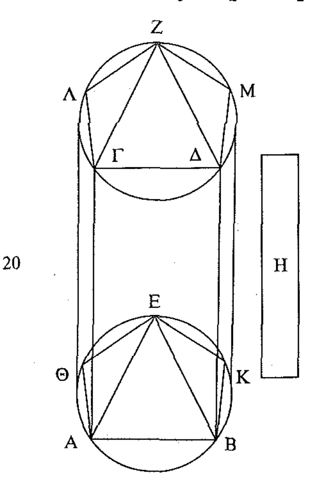
Sea un cilindro recto cuya base sea el círculo AB y su opuesto el ΓΔ, y trácense las rectas AΓ, BΔ.

---

36 [*Pues las bases son mayores que las bases y la altura es igual*].

37 Entiéndase «de ambos miembros de la desigualdad».

Digo que la superficie del cilindro cortada por las rectas AΓ, BΔ es mayor que el paralelogramo AΓBΔ.



Córtese por la mitad cada uno de los arcos AB, ΓΔ por los puntos E, Z y trácense las rectas AE, EB, ΓZ, ZΔ. Y *puesto que las rectas* AE, EB son mayores que AB [*Elem.* I 20][38] y que los paralelogramos construidos sobre ellas son de la misma altura, entonces ⟨la suma de⟩ los paralelogramos que tienen por bases AE, EB y por altura la misma que el cilindro es mayor que el paralelogramo ABΓΔ [*Elem.* VI 1]. ¿Y en qué medida son mayores? Séanlo en el área H. Y el área H o bien es menor que ⟨la suma de⟩ los segmentos planos AE, EB, ΓZ, ZΔ o no es menor.

Primero, no sea menor.

Y puesto que la superficie del cilindro cortada por las rectas AΓ, BΔ y los ⟨segmentos⟩ AEB, ΓZΔ[39] tiene por límite el
42 plano del paralelogramo AΓBΔ, y que también la superficie compuesta por los paralelogramos cuyas bases son AE, EB y su altura la misma que la del cilindro más los ⟨triángulos⟩ AEB, ΓZΔ[40] tiene por límite el plano del paralelogramo AΔBΓ, y la una contiene a la otra y ambas son cóncavas hacia el mismo lado, entonces la superficie del cilindro cortada por

[38] El texto griego «mayores que *[el diámetro]* AB» es evidentemente erróneo.

[39] El texto griego habla, erróneamente, de los *triángulos* AEB, ΓZΔ. Traduzco entre corchetes angulares la conjetura de Heiberg.

[40] El texto griego habla, erróneamente, de las *figuras planas* AEB, ΓZΔ. Traduzco entre corchetes angulares la conjetura de Heiberg.

las rectas ΑΓ, ΒΔ más los segmentos planos ΑΕΒ, ΓΖΔ es mayor que la superficie compuesta por los paralelogramos cuyas bases son ΑΕ, ΕΒ y su altura la misma que la del cilindro más los triángulos ΑΕΒ, ΓΖΔ [Post. 4]. Réstense de ambos[41] los triángulos ΑΕΒ, ΓΖΔ. Entonces la restante superficie del cilindro cortada por las rectas ΑΓ, ΒΔ más los segmentos planos ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ es mayor que la superficie compuesta por los paralelogramos cuyas bases son ΑΕ, ΕΒ y su altura la misma que la del cilindro. Y los paralelogramos cuyas bases son ΑΕ, ΕΒ y su altura la misma que la del cilindro son iguales al paralelogramo ΑΓΒΔ más el área Η [por hipót.].

Luego la restante superficie del cilindro cortada por las rectas ΑΓ, ΒΔ es mayor que el paralelogramo ΑΓΒΔ.

Pero sea el área Η menor que los segmentos planos ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ.

Y córtese por la mitad cada uno de los arcos ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ por los puntos Θ, Κ, Λ, Μ y trácense las rectas ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, 44
ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ[42]. Tras hacer esto repetidamente quedarán unos segmentos que serán menores que el área Η. Queden y sean los segmentos ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ.

De la misma manera[43] demostraremos que los paralelogramos cuyas bases son ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ y su altura la misma que la del cilindro serán mayores que los paralelogramos cuyas bases son ΑΕ, ΕΒ y su altura la misma que la del cilindro. Y puesto que la superficie cilíndrica cortada por las rectas ΑΓ, ΒΔ más los segmentos planos ΑΕΒ, ΓΖΔ tiene por límite el plano del paralelogramo ΑΓΒΔ, y que también la superficie compuesta por los paralelogramos cuyas bases son ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ y su altura la misma que la del cilindro

[41] Entiéndase «de ambos miembros de la desigualdad».

[42] *[Por tanto, de los segmentos planos ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ se está quitando no menos de la mitad, los triángulosΑΘΕ, ΕΚΒ, ΓΛΖ, ΖΜΔ].*

[43] Es decir «que en la primera parte de esta proposición».

más las figuras rectilíneas AΘEKB, ΓΛZMΔ ⟨tiene por límite el plano del paralelogramo AΓBΔ, entonces la suma de la superficie cilíndrica cortada por las rectas AΓ, BΔ más los segmentos planos AEB, ΓZΔ es mayor que la superficie compuesta por los paralelogramos cuyas bases son AΘ, ΘE, EK, KB y su altura la misma que la del cilindro más las figuras rectilíneas AΘEKB, ΓΛZMΔ [Post. 4]⟩[44]; quítense de ambos[45] las figuras rectilíneas AΘEKB, ΓΛZMΔ; entonces la restante superficie cilíndrica, cortada por las rectas AΓ, BΔ más los segmentos planos AΘ, ΘE, EK, KB, ΓΛ, ΛZ, ZM, MΔ es mayor que la superficie compuesta por los paralelogramos cuyas bases son AΘ, ΘE, EK, KB y su altura la misma que la del cilindro. Pero los paralelogramos cuyas bases son AΘ, ΘE, EK,
46 KB y su altura la misma que la del cilindro son mayores que los paralelogramos cuyas bases son AE, EB y su altura la misma que la del cilindro; luego la superficie del cilindro cortada por las rectas AΓ, BΔ más los segmentos planos AΘ, ΘE, EK, KB, ΓΛ, ΛZ, ZM, MΔ es mayor que los paralelogramos cuyas bases son AE, EB y su altura la misma que la del cilindro. Y los paralelogramos cuyas bases son AE, EB y su altura la misma que la del cilindro son iguales al paralelogramo AΓΔB más el área H [por hipót.]. Luego también la superficie del cilindro cortada por las rectas AΓ, BΔ más los segmentos planos AΘ, ΘE, EK, KB, ΓΛ, ΛZ, ZM, MΔ es mayor que el paralelogramo AΓBΔ más el área H.

Y han sido restados los segmentos AΘ, ΘE, EK, KB, ΓΛ, ΛZ, ZM, MΔ, menores que el área H. Luego la superficie restante del cilindro cortada por las rectas AΓ, BΔ es mayor que el paralelogramo AΓBΔ.

---

[44] Se percibe de modo manifiesto lo incompleto del razonamiento; Heiberg subsana la laguna añadiendo el texto entre corchetes que toma de la nota marginal de B[2].

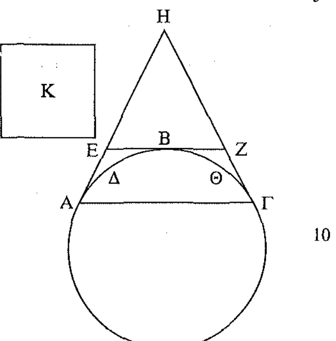
[45] Es decir «miembros de la desigualdad».

PROPOSICIÓN 12

Si en la superficie de un cilindro recto hubiera dos rectas, y desde los extremos de las rectas se trazaran tangentes a los círculos que son las bases del cilindro de modo que estén en los planos de éstas[46] *y se corten, los paralelogramos comprendidos por las tangentes y las generatrices del cilindro serán mayores que la superficie del cilindro que queda entre las rectas que están en la superficie del cilindro.*

Sea el círculo ABΓ la base de un cilindro recto y haya en su superficie dos rectas cuyos extremos sean A, Γ; y desde A, 48
Γ trácense tangentes al círculo que estén en el mismo plano y córtense en H; considérense trazadas también en la otra base del cilindro rectas tangentes al círculo desde los extremos ⟨de las rectas⟩[47] en su superficie.

Se ha de demostrar que los paralelogramos comprendidos por las tangentes y las generatrices del cilindro son mayores que la superficie del cilindro correspondiente al arco ABΓ.



⟨Una vez cortado por la mitad el arco ABΓ por el punto B⟩[48], trácese la tangente EZ, y desde los puntos E, Z trácense

[46] Es decir, «en los planos de las bases».

[47] Lo contenido entre corchetes es adición de Heiberg.

[48] Nizze y Heiberg proponen suplir el texto de los mss. con la expresión entre corchetes siguiendo una indicación marginal de B.

unas rectas paralelas al eje del cilindro hasta[49] la otra base. Así, los paralelogramos comprendidos por AH, HΓ y las generatrices del cilindro son mayores que los paralelogramos comprendidos por AE, EZ, ZΓ y la generatriz del cilindro[50]. Sea el área K ⟨la magnitud⟩ en que son mayores.

Entonces, la mitad del área K es mayor que las figuras comprendidas por las rectas AE, EZ, ZΓ y los arcos AΔ, ΔB, BΘ, ΘΓ o no.

Sea primero mayor.

El límite de la superficie compuesta por los paralelogramos correspondientes a las rectas AE, EZ, ZΓ y el trapecio AEZΓ y su opuesto en la otra base del cilindro es el perímetro del paralelogramo correspondiente a AΓ. Y el mismo perímetro es también límite de la superficie compuesta por la superficie del cilindro correspondiente al arco ABΓ más los segmentos ABΓ y su opuesto. Entonces, las superficies mencionadas tienen precisamente el mismo límite, que está en un plano, y ambas son cóncavas hacia el mismo lado y una de ellas contiene unas partes de la otra y las otras partes las tienen en común. Luego la contenida es menor [Post. 4]. Quitadas las partes comunes —el segmento ABΓ y su opuesto— la superficie del cilindro correspondiente al arco ABΓ es menor que la superficie compuesta por los paralelogramos correspondientes a las rectas AE, EZ, ZΓ más las figuras AEB, BZΓ y sus opuestas. Y las superficies de los paralelogramos mencionados junto con las figuras mencionadas son meno-

[49] La expresión [*la superficie de*] que aparece en los mss. es evidentemente errónea.

[50] [*Puesto que EH, HZ son mayores que EZ, añádanse en común AE, ZΓ. Entonces las rectas HA, HΓ enteras son mayores que AE, EZ, ZΓ*].

res que la superficie compuesta por los paralelogramos correspondientes a AH, HΓ[51].

Por tanto, es evidente que los paralelogramos comprendidos por AH, ΓH y las generatrices del cilindro son mayores que la superficie del cilindro correspondiente al arco ABΓ.

Y si la mitad del área K no es mayor que las figuras mencionadas, se trazarán rectas tangentes al segmento de modo que las restantes figuras circundantes resulten ser menores que la mitad de K[52], y lo demás se demostrará igual que lo de arriba[53].

***

Demostrado esto está claro que[54], si se inscribe una pi- 52
rámide en un cono isósceles, la superficie de la pirámide
excluida la base es menor que la superficie del cono [Prop. 4
9][55] y que si se circunscribe una pirámide a un cono isósce- 9
les, la superficie de la pirámide excluida la base es mayor
que la superficie del cono excluida la base [Prop. 10][56].

***

Está claro a partir de lo demostrado que si se inscribe un prisma en un cilindro recto, la superficie del prisma compuesta por los paralelogramos es menor que la superficie del

[51] [*Ya que junto con K, que es mayor que las figuras, eran iguales a ellos*].

[52] Cf. prop. 6 (20, 17 y ss.).

[53] Prop. 11 (42, 23 y ss.).

[54] [*Sobre la base de lo dicho anteriormente*].

[55] [*Pues cada uno de los triángulos que contienen la pirámide es menor que la superficie del cono que queda entre los lados del triángulo; de manera que también la superficie entera de la pirámide excluida la base es menor que la superficie del cono excluida la base*].

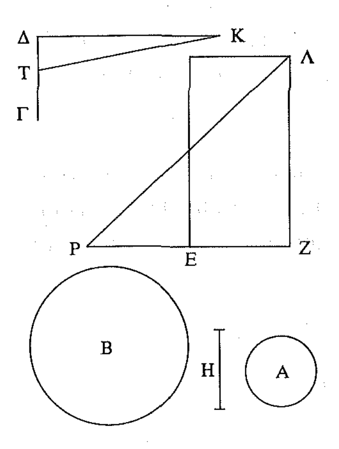
[56] [*Según se deduce de aquello*].

cilindro excluidas las bases[57] [Prop. 11], y que si se circunscribe un prisma a un cilindro recto, la superficie del prisma compuesta por los paralelogramos es mayor que la superficie del cilindro excluidas las bases [Prop. 12].

PROPOSICIÓN 13

La superficie de todo cilindro recto excluida la base es igual a un círculo cuyo radio es media proporcional de la generatriz del cilindro y el diámetro de la base del cilindro.

54 Sea el círculo A la base de un cilindro recto y sea ΓΔ igual al diámetro del círculo A, y EZ igual a la generatriz del cilindro y téngase H por media proporcional de ΔΓ, EZ y póngase el círculo B cuyo radio sea igual a H.



[57] [*Ya que cada uno de los paralelogramos del prisma es menor que la superficie del cilindro correspondiente a él*].

«Bases» es corrección de Heiberg; los mss., aquí como más adelante, lín. 22, dan el singular «base».

Se ha de demostrar que el círculo B es igual a la superficie del cilindro excluida la base.

Pues si no es igual, ha de ser mayor o menor.

Sea primero, si es posible, menor.

Habiendo dos magnitudes desiguales —la superficie del cilindro y el círculo B— es posible inscribir en el círculo B un polígono equilátero y circunscribir otro de modo que el circunscrito guarde con el inscrito una razón menor que la que guarda la superficie del cilindro con el círculo B [Prop. 5]. Considérese circunscrito e inscrito, y circunscríbase al círculo A una figura rectilínea semejante a la circunscrita a B y a partir de esta figura rectilínea constrúyase un prisma[58]. Estará circunscrito al cilindro. Sea también KΔ igual al perímetro de la figura rectilínea circunscrita al círculo A, y ΛZ igual a KΔ y sea ΓT la mitad de ΓΔ. El triángulo KΔT será igual a la figura rectilínea circunscrita al círculo A[59], y el paralelogramo EΛ igual a la superficie del prisma circunscrito al cilindro[60]. Póngase EP igual a EZ. **56**

Entonces el triángulo ZPΛ es igual al paralelogramo EΛ [*Elem.* I 41], así que también a la superficie del prisma. Y puesto que las figuras rectilíneas circunscritas a los círculos A, B son semejantes, guardarán la misma razón[61] que los cuadrados construidos sobre los radios. Entonces el triangulo KTΔ guardará con la figura rectilínea circunscrita al círculo B la misma razón que el cuadrado de lado TΔ con el de

[58] El prisma ha de ser «de la misma altura que el cilindro», como señala un escolio a B.

[59] [*Puesto que tiene por base una recta igual a su perímetro y la altura igual al radio del círculo A*].

[60] [*Puesto que está comprendido por la generatriz del cilindro y una recta igual al perímetro de la base del prisma*].

[61] [*Las figuras rectilíneas*].

lado H [*Elem.* VI 1][62]. Pero la razón que guarda el cuadrado de lado TΔ con el de lado H es la razón que guarda TΔ con PZ
24 en longitud[63]. Y la razón que guarda TΔ con PZ en longitud
25 es la que guarda el triángulo KTΔ con el triángulo PΛZ[64]; luego el triángulo KTΔ guarda con la figura rectilínea circunscrita al círculo B la misma razón que el triángulo TKΔ
58 con el triángulo PZΛ. Luego el triángulo ZΛP es igual a la figura rectilínea circunscrita al círculo B [*Elem.* V 9]. De manera que también la superficie del prisma circunscrito al cilindro A es igual a la figura rectilínea circunscrita al círculo B. Y puesto que la figura rectilínea circunscrita al círculo B guarda con la figura inscrita en el círculo una razón menor que la que guarda la superficie del cilindro A con el círculo B [por hipót.], también la superficie del prisma circunscrito al cilindro guardará con la figura rectilínea inscrita en el círculo B una razón menor que la que guarde la superficie del

[62] [*Puesto que las rectas* TΔ, H *son iguales a los radios*].

[63] [*Ya que* H *es media proporcional de* TΔ, PZ, *puesto que lo es también de* ΓΔ, EZ. *¿Cómo es eso? Puesto que* ΔT *es igual a* TΓ *y* PE *igual a* EZ, *entonces* ΓΔ *es el doble de* TΔ *y* PZ *el doble de* PE; *luego* ΔΓ *es a* ΔT *como* PZ *es a* ZE; *luego el rectángulo comprendido por* ΓΔ, EZ *es igual al comprendido por* TΔ, PZ. *Y el cuadrado de lado* H *es igual al rectángulo comprendido por* ΓΔ, EZ; *y entonces el cuadrado de lado* H *es igual al rectángulo comprendido por* TΔ, PZ; *luego* TΔ *es a* H *como* H *a* PZ; *luego* TΔ *es a* PZ *como el cuadrado de* TΔ *al cuadrado de* H; *y si tres rectas están en proporción, la primera es a la tercera como la figura construida sobre la primera es a la figura semejante y construida de manera semejante sobre la segunda* (*Elem.* VI 20, corol. 2)]. Se ha hecho notar en esta glosa la evidente ausencia de la concisión característica de los textos matemáticos y del estilo de Arquímedes; Heiberg abrevia la explicación en notación moderna del siguiente modo: Por hipótesis, H^2 = ΔΓ x EZ y ΔΓ = 2TΔ, EZ = 1/2PZ; por lo cual, H^2 = TΔ x PZ, es decir, que TΔ : H :: H : PZ, y es de aplicación *Elem.* VI 20, corol. 2, como figura en la glosa.

[64] [*Puesto que* KΔ, ΛZ *son iguales*].

cilindro con el círculo B y lo mismo tomando la proporción en alternancia[65]. Lo cual es imposible[66].

Luego el círculo B no es menor que la superficie del cilindro.

Sea mayor, si es posible.

Considérese de nuevo una figura rectilínea inscrita en el círculo B y otra circunscrita, de manera que la circunscrita guarde con la inscrita una razón menor que el círculo B con la superficie del cilindro [Prop. 5], e inscríbase en el círculo A un polígono semejante al inscrito en el círculo B, y constrúyase un prisma sobre el polígono inscrito en el círculo [67]. Y sea de nuevo KΔ igual al perímetro de la figura rectilínea inscrita en el círculo A, y sea ZΛ igual a ella.

Entonces el triángulo KTΔ será mayor que la figura rectilínea inscrita en el círculo A[68], y el paralelogramo EΛ será igual a la superficie del prisma compuesta por paralelogramos[69]. De modo que también el triángulo PΛZ es igual a la superficie del prisma. Y puesto que las figuras rectilíneas inscritas en los círculos A, B son semejantes, guardan entre sí la misma razón que los cuadrados construidos sobre los

---

[65] EUT. (32, 3-6) cita el texto de Arquímedes «Luego, tomando la proporción en alternancia, el prisma guarda con el cilindro una razón menor que el polígono inscrito en el círculo B con el círculo B. Lo cual es imposible», en lugar de las frases «Y lo mismo tomando la proporción en alternancia. Lo cual es imposible».

[66] [*Ya que se ha demostrado que la superficie del prisma circunscrito al cilindro es mayor que la superficie del cilindro, mientras que la figura rectilínea inscrita en el círculo* B *es menor que el círculo* B]. El texto secluido resume el contenido del comentario de Eutocio.

[67] Entiéndase:«en el círculo A».

[68] [*Puesto que por base tiene su perímetro y una altura mayor que la perpendicular trazada desde el centro hasta un lado del polígono*].

[69] [*Puesto que está comprendido por la generatriz del cilindro y una línea igual al perímetro de la figura rectilínea que es la base del prisma*].

radios de los círculos [*Elem.* XII 1]. Y también los triángulos ΚΤΔ, ΖΡΛ guardan entre sí la razón de los cuadrados construidos sobre los radios de los círculos[70]. Luego la figura rectilínea inscrita en el círculo Α guarda con la figura rectilínea inscrita en el círculo Β la misma razón que el triángulo ΚΤΔ con el triángulo ΛΖΡ. Y la figura rectilínea inscrita en
20 el círculo Α es menor que el triángulo ΚΤΔ. Luego también la figura rectilínea inscrita en el círculo Β es menor que el triángulo ΖΡΛ; de manera que también es menor que la su-
23 perficie del prisma inscrito en el cilindro. Lo cual es imposible[71].

62 Luego el círculo Β no es mayor que la superficie del cilindro.

Y se había demostrado que tampoco era menor. Luego es igual.

5 PROPOSICIÓN 14

La superficie de todo cono isósceles excluida la base es igual al círculo cuyo radio es media proporcional entre la generatriz del cono y el radio del círculo que es la base del cono.

---

[70] Heiberg justifica este aserto de la manera siguiente: ΚΤΔ : ΖΛΡ = ΤΔ : ΖΡ = $ΤΔ^2 : Η^2$; pero ΤΔ es igual al radio del círculo Α, y Η es el radio del círculo Β.

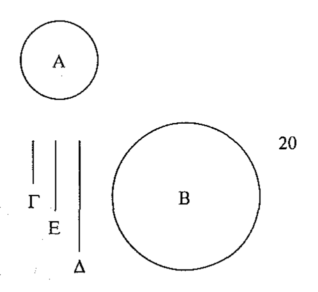
[71] [*Ya que la figura rectilínea circunscrita al círculo* Β *guarda con la inscrita una razón menor que el círculo* Β *con la superficie del cilindro, y lo mismo tomando la proporción en alternancia, y que la figura circunscrita en torno al círculo* Β *es mayor que el círculo* Β, *entonces la figura inscrita en el círculo* Β *es mayor que la superficie del cilindro; luego también mayor que la superficie del prisma*].

Sea un cono isósceles cuya base sea el círculo A y sea Γ su radio y sea Δ igual a la generatriz del cono, y sea E media proporcional de Γ, Δ, y tenga el círculo B su radio igual a E.

Digo que el círculo B es igual a la superficie del cono excluida la base.

Pues si no es igual, o bien es mayor o menor.

Sea primero menor.



La superficie del cono y el círculo B son dos magnitudes desiguales, y la superficie del cono es mayor; luego es posible inscribir un polígono equilátero en el círculo B y circunscribir otro semejante al inscrito de manera que el circunscrito guarde con el inscrito una razón menor que la que guarda la superficie del cono con el círculo B [Prop. 5]. Considérese también circunscrito al círculo A un polígono semejante al circunscrito al círculo B, y sobre el polígono circunscrito al círculo A constrúyase una pirámide que tenga el mismo vértice que el cono.

Puesto que los polígonos circunscritos a los círculos A, B son semejantes, guardan entre sí la misma razón que los 64
cuadrados de los radios entre sí —esto es, la que guardan los cuadrados de lado Γ y lado E; esto es, la razón de Γ a Δ en longitud [*Elem.* VI 20, corol. 2]—. Y la razón que guarda en longitud Γ con Δ es la que guarda el polígono circunscrito al círculo A con la superficie de la pirámide circunscrita al cono[72], luego la figura rectilínea en torno al círculo A guarda

[72] *[Pues Γ es igual a la perpendicular desde el centro hasta un lado del polígono y Δ es igual a la generatriz del cono; altura común, el perímetro del polígono frente a la mitad de las superficies].*

El texto de la glosa es oscuro, aunque se comprende bien su intención; es evidente que cada una de las figuras en cuestión es igual a un triángulo

con la figura rectilínea en torno al círculo B la misma razón que esa misma figura rectilínea[73] con la superficie de la pirámide circunscrita al cono; de manera que la superficie de la pirámide es igual a la figura rectilínea circunscrita al círculo B [*Elem.* V 9]. Puesto que la figura rectilínea circunscrita al círculo B guarda con la inscrita una razón menor que la superficie del cono con el círculo B, la superficie de la pirámide circunscrita al cono guardará con la figura rectilínea inscrita en el círculo B una razón menor que la superficie del cono con el círculo B. Lo cual es imposible[74].

Luego el círculo B no será menor que la superficie del cono.

Y afirmo que tampoco será mayor.

Pues si es posible, sea mayor.

66 De nuevo considérese un polígono inscrito en el círculo B y otro circunscrito, de manera que el circunscrito guarde con el inscrito una razón menor que la que guarda el círculo B con la superficie del cono [Prop. 5], y considérese inscrito en el círculo A un polígono semejante al inscrito en el círculo B, y constrúyase sobre él una pirámide que tenga el mismo vértice que el cono.

Puesto que los polígonos inscritos en los círculos A, B son semejantes, guardarán entre sí la misma razón que la que guardan los cuadrados de los radios entre sí [*Elem.* XII 1]. Entonces el polígono guarda con el polígono la misma

---

cuya base fuera el perímetro del polígono, y cuyas alturas serían, respectivamente, Γ para el polígono y Δ para la pirámide; en aplicación de *Elem.* VI 1: «Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases», la relación entre el polígono circunscrito y la superficie lateral de la pirámide es la de Γ : Δ.

[73] Es decir, «la figura circunscrita a A».

[74] [*Pues se ha demostrado que la superficie de la pirámide es mayor que la superficie del cono, mientras que la figura rectilínea inscrita en el círculo* B *será menor que el círculo* B].

razón que Γ con Δ en longitud [*Elem.* VI 20, corol. 2]. Y Γ guarda con Δ una razón mayor que el polígono inscrito en el círculo A con la superficie de la pirámide inscrita en el cono[75]. Luego el polígono inscrito en el círculo A guarda con el polígono inscrito en el círculo B una razón mayor que ese mismo polígono[76] con la superficie de la pirámide. Luego la superficie de la pirámide es mayor que el polígono inscrito en el círculo B. Y el polígono circunscrito al círculo B guarda con el inscrito una razón menor que el círculo B con la superficie del cono. Luego con más razón el polígono circunscrito al círculo B guarda con la superficie de la pirámide inscrita en el cono una razón menor que el círculo B con 68
la superficie del cono. Lo cual es imposible[77].

Luego el círculo tampoco es mayor que la superficie del cono. Y se había demostrado que tampoco era menor; luego es igual.

Proposición 15

La superficie de todo cono isósceles guarda con la base la misma razón que la generatriz del cono con el radio de la base del cono.

---

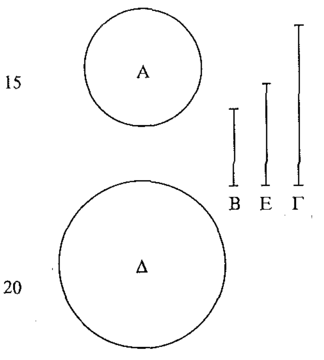
[75] [*Pues el radio del círculo* A *guarda con la generatriz del cono una razón mayor que la que guarda la perpendicular trazada desde el centro hasta un lado del polígono con la perpendicular trazada desde el vértice del cono hasta un lado del polígono*].

Esta parte del texto coincide de modo prácticamente literal con el principio del comentario de Eut., 32.

[76] Es decir, «el inscrito en el círculo A».

[77] [*Pues el polígono circunscrito es mayor que el círculo* B, *mientras que la superficie de la pirámide inscrita en el cono es menor que la superficie del cono*].

Sea un cono isósceles cuya base es el círculo A, y sea B igual al radio de A y Γ igual a la generatriz del cono.



Se ha de demostrar que la superficie del cono guarda con el círculo A la misma razón que Γ con B.

Tómese E como media proporcional de B, Γ, y trácese el círculo Δ de radio igual a E. Entonces el círculo Δ es igual a la superficie del cono [Prop. 14][78]. Y se había demostrado que el círculo Δ guarda con el círculo A la misma razón que Γ con B en longitud[79].

28 Así que es evidente que la superficie del cono guarda con el círculo A la misma razón que Γ con B en longitud.

Proposición 16

70 *Si un cono isósceles es cortado por un plano paralelo a la base, la superficie del cono comprendida entre los planos paralelos es igual a un círculo cuyo radio es media proporcional entre la ⟨porción de⟩ generatriz del cono situada entre los planos paralelos y una recta igual a la suma de los radios de los círculos situados en los planos paralelos.*

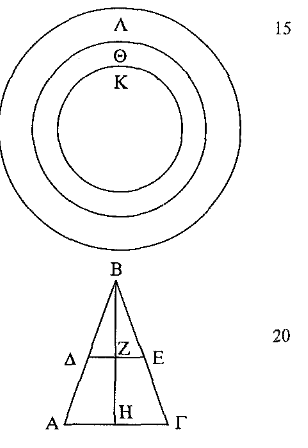
---

[78] [*Esto quedó demostrado en la proposición anterior*].

[79] [*Cada una de las razones es la misma que guardan* E *y* B *en cuadrado por ser los círculos entre sí como los cuadrados de sus diámetros entre sí* (*Elem.* XII 2) *y, de manera semejante, también los cuadrados de los radios de los círculos; pues si lo son los diámetros, también sus mitades, es decir, los radios; y* B, E *son iguales a los radios*].

Sea un cono en el que el triángulo que pasa por el eje sea igual a ABΓ, y sea cortado por un plano paralelo a la base y produzca como sección ΔE, y sea BH el eje del cono; y póngase un círculo cuyo radio sea media proporcional de AΔ y de la suma de ΔZ, HA: sea el círculo Θ.

Digo que el círculo Θ es igual a la superficie del cono comprendida entre ΔE, AΓ.



Trácense los círculos Λ, K, y sea el cuadrado del radio del círculo K equivalente al rectángulo comprendido por BΔZ, y sea el cuadrado del radio de Λ equivalente al rectángulo comprendido por BAH.

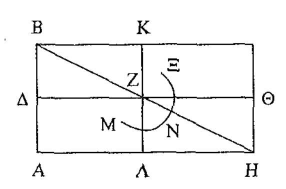
Entonces el círculo Λ es igual a la superficie del cono ABΓ, y el círculo K es igual a la superficie del cono ΔEB [Prop. 14]. Y puesto que el rectángulo comprendido por BA, AH es igual al comprendido por BΔ, ΔZ más el comprendido por AΔ y la suma de ΔZ, AH —ya que ΔZ es paralela a AH[80]— mientras que el rectángulo comprendido por AB, AH equivale al cuadrado del radio del círculo Λ y el rectángulo comprendido por BΔ, ΔZ equivale al cuadrado del radio del círculo K, y el rectángulo comprendido por ΔA y la suma de ΔZ, AH equivale al cua- 72
drado del radio de Θ [por hipót.], entonces el cuadrado del radio del círculo Λ es igual a la suma de los cuadrados de los radios de los círculos K, Θ. De manera que también el círculo Λ es igual a la suma de los círculos K, Θ. Pero el cír-

[80] Este aserto se prueba en el texto entre corchetes cuadrados que sigue a esta misma proposición (72, 9-23); otra demostración en EUTOCIO, 34, 23-36, 7.

culo Λ es igual a la superficie del cono BAΓ, mientras que el círculo K es igual a la superficie del cono ΔBE.

Luego la superficie restante del cono, la comprendida entre los planos paralelos ΔE, AΓ es igual al círculo Θ.

[Sea[81] BAH un paralelogramo y sea su diagonal BH. Córtese el lado BA al azar por el punto Δ y por el punto Δ trácese la recta ΔΘ paralela a AH, y por el punto Z la recta KΛ paralela a BA.



Digo que el paralelogramo BAH es igual a la suma del paralelogramo BΔZ más el formado por ΔA y la suma de ΔZ, AH.

Puesto que el paralelogramo BAH entero es el de diagonal BH y el BΔZ es el de diagonal BZ, y el comprendido por ΔA y la suma de ΔZ, AH es el gnomon[82] MNΞ; pues el rectángulo comprendido por ΔAH es igual al KH por ser igual el complemento KΘ al complemento ΔΛ, mientras que el comprendido por ΔA, ΔZ es igual al de diagonal ΔΛ.

Luego la figura entera BH, que es el rectángulo comprendido por BAH, es igual al comprendido por BΔZ mas el gnomon MNΞ, que es igual al rectángulo comprendido por ΔA y la suma de AH, ΔZ].

[81] Este texto —evidentemente, una glosa con carácter de lema—, que no figura en el ms. B, aparece en los mss. A y C y los que dependen de ellos.

[82] La definición de gnomon figura en EUCLIDES (*Elem.* II, def. 2): «En cualquier área de paralelogramo llámese gnomon a uno cualquiera de los paralelogramos dispuestos en torno al diámetro con los dos complementos» (trad. de Mª. L. PUERTAS en B. C. G., 155).

LEMAS[83]

1. Los conos que tienen la misma altura guardan la misma razón que las bases. Y los que tienen las mismas bases guardan la misma razón que sus alturas[84].
2. Si un cilindro es cortado por un plano paralelo a la base, como el cilindro es al cilindro es el eje al eje[85].
3. Los conos que tienen las mismas bases que los cilindros[86] están en la misma razón que los cilindros.
4. En los conos iguales las bases son inversamente proporcionales a las alturas. Y aquéllos en los que las bases son inversamente proporcionales a las alturas son iguales[87].
5. Los conos en los que los diámetros de sus bases guardan la misma razón que los ejes[88], guardan entre sí una razón que es el cubo de la de los diámetros de sus bases[89].

Todo esto fue demostrado por los antiguos.

---

[83] Al igual que la glosa anterior, los lemas figuran en C y en los mss. derivados de A, pero faltaban en B, en donde Moerbeke los añadió como nota marginal haciendo constar que los tomaba de otro ejemplar. Una mano distinta de la suya anotó que se trataba de enunciados demostrados por Euclides. La numeración no figura en los mss., sino que es debida a Torelli.

[84] *Elem.* XII 11 y *Elem.* XII 14.

[85] *Elem.* XII 13.

[86] La demostración no figura en Euclides, pero puede deducirse de *Elem.* XII 10. Por otro lado, el sentido exige la restitución de las palabras «y las mismas alturas».

[87] *Elem.* XII 15.

[88] [*Es decir, que las alturas*].

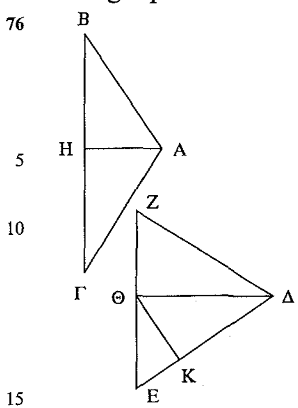
[89] *Elem.* XII 12 y cf. XI def. 24.

Proposición 17

Si hay dos conos isósceles y la superficie de un cono es igual a la base del otro y la perpendicular trazada desde el centro de la base hasta la generatriz del cono es igual a la altura, los conos serán iguales.

Sean ABΓ, ΔEZ dos conos isósceles y sea la base de ABΓ igual a la superficie de ΔEZ, y sea la altura AH igual a KΘ, la perpendicular trazada desde el centro de la base Θ, hasta una generatriz del cono, como ΔE.

Digo que los conos son iguales.



76 Puesto que la base de ABΓ es igual a la superficie de ΔEZ[90], entonces la base de BAΓ es a la base de ΔEZ como la superficie de ΔEZ a la base de ΔEZ [*Elem.* V 7]. Pero la superficie es a su propia base como ΔΘ a ΘK[91]. Y ΘK es igual a AH. Luego la base de BAΓ es a la base de ΔEZ como la altura de ΔEZ a la altura de ABΓ. Luego las bases de ABΓ, ΔEZ son inversamente proporcionales a las alturas. Luego el cono BAΓ es igual al ΔEZ [Lema 4, 74, 6-8].

---

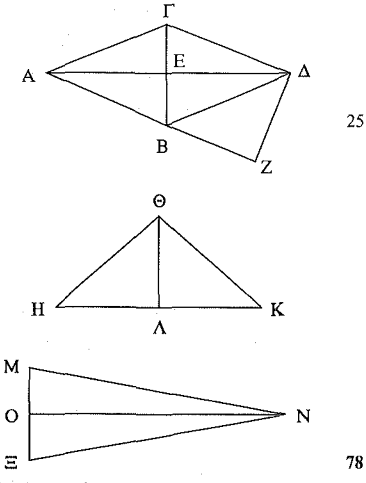
[90] [*Y las magnitudes iguales guardan con lo mismo la misma razón*].

[91] [*Pues esto se había demostrado* (Prop. 15), *que la superficie de todo cono isósceles guarda con su base la misma razón que la generatriz del cono con el radio de la base, es decir, son como ΔE a EΘ. Y EΔ es a ΘΔ como EΘ a ΘK, pues los triángulos son equiángulos* (*Elem.* VI 4)].

PROPOSICIÓN 18

Todo rombo[92] *compuesto por conos isósceles es igual a un cono que tenga la base igual a la superficie de uno de los conos que contienen el rombo y la altura igual a la perpendicular trazada desde el vértice del otro cono hasta la generatriz del primer cono.*

Sea ABΓΔ un rombo compuesto por conos isósceles cuya base sea el círculo de diámetro BΓ, y su altura AΔ y constrúyase otro cono HΘK que tenga la base igual a la superficie del cono ABΓ y la altura igual a la perpendicular trazada desde el punto Δ hasta la recta AB o hasta la recta trazada como prolongación de ella y sea ΔZ, y sea ΘΛ la altura del cono ΘHK. Y ΘΛ es igual a ΔZ. 78



Digo que el cono[93] es igual al rombo.

Pongamos otro cono MNΞ que tenga la base igual a la base del cono ABΓ y la altura igual a AΔ, y sea su altura NO.

Puesto que la recta NO es igual a AΔ, entonces NO es a ΔE como AΔ es a ΔE [*Elem.* V 7]. Pero AΔ es a ΔE como el rombo ABΓΔ es al cono BΓΔ y NO es a ΔE como el cono MNΞ al

---

[92] «Rombo sólido», se entiende; v. def 6.

[93] Se entiende: «el cono HΘK».

cono ΒΓΔ[94]. Por tanto, el cono ΜΝΞ es al cono ΒΓΔ como el rombo ΑΒΓΔ al cono ΒΓΔ. Luego ΜΝΞ es igual al rombo ΑΒΓΔ [*Elem.* V 9]. Y puesto que la superficie de ΑΒΓ es igual a la base de ΗΘΚ, entonces la superficie de ΑΒΓ es a su propia base como la base de ΗΘΚ es a la base de ΜΝΞ[95]. Y la superficie de ΑΒΓ es a su propia base como ΑΒ es a ΒΕ [Prop. 15], es decir, como ΑΔ es a ΔΖ[96]. Luego la base de ΗΘΚ es a la base de ΜΝΞ como ΑΔ es a ΔΖ. Y ΑΔ es igual a ΝΟ[97], y ΔΖ a ΘΛ [por hipót.]. Luego la base de ΗΘΚ es a la base de ΜΝΞ como la altura ΝΟ es a la altura ΘΛ. Luego las bases de los conos ΗΘΚ, ΜΝΞ son inversamente proporcionales a sus alturas; luego los conos son iguales [Lema 4 (74, 6-8)]. Y se había demostrado que ΜΝΞ es igual al rombo ΑΒΓΔ.

Luego también el cono ΗΘΚ es igual al rombo ΑΒΓΔ.

Proposición 19

Si se corta un cono isósceles mediante un plano paralelo a la base y sobre el círculo resultante se construye un cono que tenga por vértice el centro de la base y del cono entero se resta el rombo resultante, la figura circundante[98] *será igual a un cono que tenga su base igual a la superficie del cono que queda entre los planos paralelos y la altura*

[94] [*Por ser sus bases iguales*].

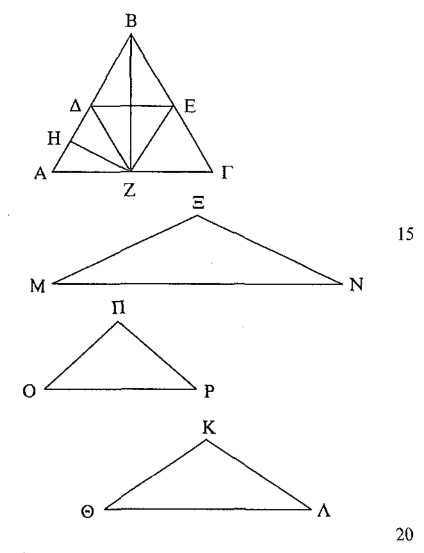
[95] [*Pues la base de* ΑΒΓ *es igual a la base de* ΜΝΞ].

[96] [*Pues son triángulos semejantes*].

[97] [*Pues se había supuesto*].

[98] En gr., *perileimma;* MUGLER *(Dictionnaire...*, art. περίλειμμα) explica: «Nombre por el cual Arquímedes designa lo que queda de una figura, plana o en el espacio, tras la sustracción de otra o varias otras figuras».

igual a la perpendicular trazada desde el centro de la base hasta una generatriz del cono[99].



Sea ΑΒΓ un cono isósceles y sea cortado mediante un plano paralelo a la base y produzca como sección ΔΕ, y sea Ζ el centro de la base, y sobre el círculo de diámetro ΔΕ constrúyase un cono que tenga Ζ por vértice. Así, ΒΔΖΕ será un rombo compuesto por conos isósceles. Constrúyase un cono ΚΘΛ cuya base sea igual a la superficie que queda entre ΔΕ, ΑΓ y su altura, una vez trazada ΖΗ perpendicular desde el punto Ζ hasta ΑΒ, sea igual a ΖΗ.

Digo que si se considera restado el rombo ΒΔΖΕ del cono ΑΒΓ, la figura circundante será igual al cono ΘΚΛ.

Pónganse dos conos ΜΝΞ, ΟΠΡ de modo que la base de ΜΝΞ sea igual a la superficie del cono ΑΒΓ y la altura igual a ΖΗ[100], y la base del cono ΟΠΡ sea igual a la superficie del co- 82
no ΔΒΕ y la altura igual a ΖΗ[101].

[99] «Del cono primero», hemos de entender a la luz de lo que se dice en la descripción de la figura.

[100] [*Por eso precisamente el cono ΜΝΞ es igual al cono ΑΒΓ; pues si hubiera dos conos isósceles y la superficie de un cono fuera igual a la base del otro —y además la perpendicular trazada desde el centro de la base hasta la generatriz del cono fuera igual a la altura, los conos serían iguales* (Prop. 17)].

[101] [*Por eso precisamente el cono ΟΠΡ es igual al rombo ΒΔΖΗ. Pues esto se había demostrado previamente* (Prop. 17)].

Puesto que la superficie del cono ΑΒΓ se compone de la superficie del cono ΔΒΕ más la superficie que queda entre ΔΕ, ΑΓ y la superficie del cono ΑΒΓ es igual a la base del cono ΜΝΞ, mientras que la superficie del cono ΔΒΕ es igual a la base del cono ΟΠΡ, y la superficie que queda entre ΔΕ, ΑΓ es igual a la base de ΘΚΛ [por hipót.], entonces la base de ΜΝΞ es igual a la suma de las bases de los conos ΘΚΛ, ΟΠΡ. Y los conos tienen la misma altura; luego el cono ΜΝΞ es igual a la suma de los conos ΘΚΛ, ΟΠΡ. Pero el cono ΜΝΞ es igual al cono ΑΒΓ [Prop. 17], y el cono ΠΟΡ al rombo ΒΔΕΖ [Prop. 18].

Luego el cono restante ΘΚΛ es igual a la figura circundante.

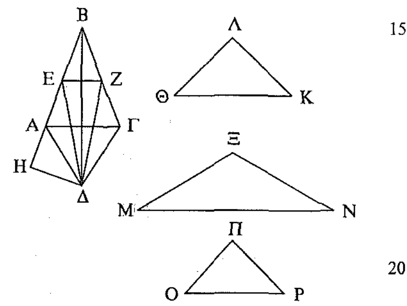
Proposición 20

Si en un rombo compuesto por conos isósceles se corta uno de los conos mediante un plano paralelo a la base y sobre el círculo resultante se construye un cono que tenga por vértice el mismo que el otro cono, y del rombo entero se resta el rombo resultante, la figura circundante es igual a un cono que tenga su base igual a la superficie del ⟨tronco de⟩ cono que queda entre los pla-
84 *nos paralelos y la altura igual a la perpendicular trazada desde el vértice de un cono hasta la generatriz del otro cono.*

Sea ΑΒΓΔ un rombo compuesto por conos isósceles y córtese uno de los conos mediante un plano paralelo a la base, y produzca como sección ΕΖ, y sobre el círculo de diámetro ΕΖ constrúyase un cono que tenga por vértice el

punto Δ. Habrá resultado el rombo ΕΒΔΖ; considérese ⟨éste⟩ quitado del rombo entero, y póngase un cono ΘΚΛ que tenga la base igual a la superficie que queda entre ΑΓ, ΕΖ y la altura igual a la perpendicular trazada desde el punto Δ hasta ΒΑ o hasta la recta prolongación de ella.

Digo que el cono ΘΚΛ es igual a la figura circundante indicada.



Constrúyanse dos conos ΜΝΞ, ΟΠΡ y sea la base del cono ΜΝΞ igual a la superficie del cono ΑΒΓ y su altura igual a ΔΗ[102], y sea la base del cono ΟΠΡ igual a la superficie del cono ΕΒΖ y la altura igual a ΔΗ[103].

Puesto que igualmente [Prop. 19] la superficie del cono ΑΒΓ se compone de la de ΕΒΖ más la que queda entre los planos ΕΖ, ΑΓ, mientras que la superficie del cono ΑΒΓ es igual a la base de ΜΝΞ y la superficie del cono ΕΒΖ es igual a la base del cono ΟΡΠ, y la superficie que queda entre los planos ΕΖ, ΑΓ es igual a la base del cono ΘΚΛ, entonces la base de ΜΝΞ es igual a la suma de las bases de ΟΠΡ, ΘΚΛ. Y 86
los conos tienen la misma altura; luego el cono ΜΝΞ es igual a la suma de los conos ΘΚΛ, ΟΠΡ. Pero el cono ΜΝΞ es igual

[102] [*Por lo ya demostrado* (Prop. 18), *el cono ΜΝΞ es igual al rombo ΑΒΓΔ*].

[103] [*De la misma manera* (Prop. 18), *el cono ΟΠΡ es igual al rombo ΕΒΔΖ*].

al rombo ΑΒΓΔ [Prop. 18], y el cono ΟΠΡ es igual al rombo ΕΒΔΖ [Prop. 18][104].

Luego el cono restante ΘΚΛ es igual a la figura circundante.

Proposición 21

Si en un círculo se inscribe un polígono equilátero de número par de lados y se trazan rectas que unan los lados[105] *del polígono de manera que éstas sean paralelas a una cualquiera de las rectas que subtienden dos lados del polígono, la suma de todas las rectas de unión guarda con el diámetro del círculo la misma razón que guarda la que subtiende la mitad de los lados menos uno con el lado del polígono.*

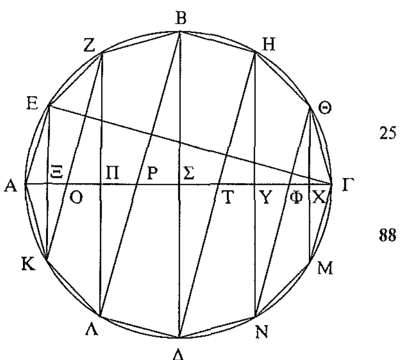
Sea ΑΒΓΔ un círculo e inscríbase en él un polígono ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ, y trácense las rectas ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ; es evidente que son paralelas a la que subtiende dos lados del polígono[106].

[104] Heiberg completa el razonamiento indicando que ΑΒΓ = ΘΚΛ + ΕΒΔΖ, y que restando de ambos miembros el rombo ΕΒΔΖ se obtiene la tesis propuesta.

[105] Según conjetura Heiberg, el texto de Arquímedes debía de decir «ángulos» en vez de «lados».

[106] Puesto que los arcos ΚΛ, ΕΖ son iguales, también son iguales los ángulos ΕΚΖ, ΚΖΛ *(Elem.* III 27), y por tanto ΕΚ y ΛΖ son paralelas. El mismo razonamiento se utilizará también más adelante y en la proposición 22.

Digo que la suma de todas las rectas indicadas guarda con el diámetro AΓ del círculo la misma razón que ΓE con EA.



Trácense las rectas ZK, ΛB, HΔ, ΘN. Entonces, ZK es paralela a EA; BΛ paralela a ZK, y también ΔH paralela a BΛ, ΘN paralela a ΔH, ΓM paralela a ΘN[107].
Por tanto, EΞ es a ΞA co- 88
mo KΞ es a ΞO [*Elem.* VI 4]. Y KΞ es a ΞO como ZΠ es a ΠO [id.]; y ZΠ es a ΠO como ΛΠ es a ΠP [*id.*]; y ΛΠ es a ΠP como BΣ es a ΣP [*id.*] y, además, BΣ es a ΣP como ΔΣ es a ΣT [*id.*]; y ΔΣ es a ΣT como HY es a YT [*id.*]; y además, HY es a YT como NY es a YΦ; y NY es a YΦ como ΘX es a XΦ; y además ΘX es a XΦ como MX es a XΓ [*id.*][108]. Luego EΞ es a ΞA como la suma de EK, ZΛ, BΔ, HN, ΘM es al diámetro AΓ [*Elem.* V 12]. Y, por otro lado, EΞ es a ΞA como ΓE es a EA.

Luego también ΓE será a EA como la suma de EK, ZA, BΔ, HN, ΘM es al diámetro AΓ.

Proposición 22

Si en un segmento de círculo se inscribe un polígono cuyos lados excepto la base sean iguales y en número par, y

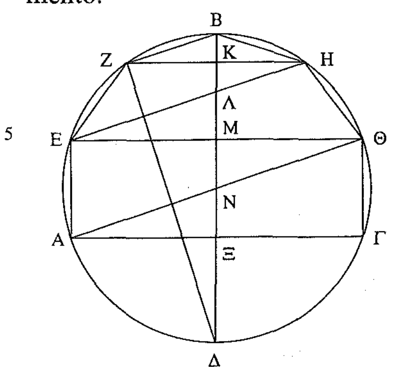
---

[107] [*Y puesto que* EA *y* KZ *son dos paralelas y* EK *y* AO *son dos rectas que las atraviesan*].

[108] [*Y por tanto la suma de todas es a la suma de todas como una es a una en la razón*].

se trazan rectas paralelas a la base del segmento que unan los lados del polígono, la suma de todas las rectas trazadas más la mitad de la base guarda con la altura del segmento la misma razón que la recta trazada para unir el diámetro[109] *del círculo y el lado del polígono con el lado del polígono.*

En el círculo ABΓΔ trácese una recta AΓ y sobre AΓ en el segmento ABΓ inscríbase un polígono de número par de la-
90 dos y que tenga los lados iguales salvo la base AΓ, y trácense las rectas ZH, EΘ, que sean paralelas a la base del segmento.



Digo que la suma de ZH, EΘ, AΞ es a BΞ como ΔZ es a ZB.

Tracemos de nuevo del mismo modo[110] las rectas HE, AΘ.

Entonces son paralelas a BZ[111]; por el mismo razonamiento[112] KZ es a KB como HK es a KΛ, y como EM es a MΛ y como MΘ es a MN y como ΞA es a ΞN[113]. Luego la suma de ZH, EΘ, AΞ es a BΞ como ZK es a KB [*Elem.* V 12]. Y ZK es a KB como ΔZ es a ZB [*Elem.* VI 4].

Luego ΔZ es a ZB como la suma de ZH, EΘ, AΞ es a BΞ.

---

[109] Como se ve en la figura, se refiere «al extremo del diámetro exterior al segmento».

[110] «Del mismo modo que en la proposición anterior», se entiende.

[111] Cf. n. 106 a la prop. 21.

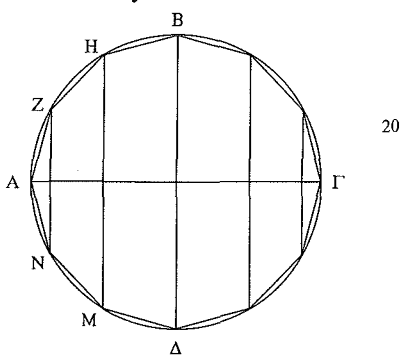
[112] El mismo que en la proposición anterior.

[113] [*Y por tanto la suma de todas es a la suma de todas como una es a una en la razón*].

Proposición 23 [114]

Sea ΑΒΓΔ un círculo máximo en la esfera e inscríbase en él un polígono equilátero y sea múltiplo de cuatro el número de sus lados y sean ΑΓ, ΔΒ diámetros suyos [115].

Si, permaneciendo fijo el diámetro ΑΓ, se hace girar en torno suyo el círculo ΑΒΓΔ que contiene al polígono, es evidente que su circunferencia habrá sido transportada por la superficie de la esfera y que los ángulos del polígono, excepto los de vértice en los puntos Α, Γ, se habrán



desplazado por la superficie de la esfera siguiendo circunferencias que describen círculos perpendiculares al círculo ΑΒΓΔ. Y las rectas que unen los ángulos del polígono, que son paralelas a ΒΔ, serán sus diámetros. Los lados del polí-

[114] En los mss. falta el enunciado. Stamatis, en «Αρχιμήδεια I», Πλάτων 19 (1967), 151, lo restituye así: «Si en un círculo máximo de la esfera se inscribe un polígono equilátero y equiángulo cuyo número de ados sea múltiplo de cuatro, y si, permaneciendo fijo el diámetro del círculo que contiene el polígono se hace girar a éste hasta que vuelva a la misma posición desde la que empezó a moverse, la superficie de la figura inscrita en la esfera será menor que la superficie de la esfera».

[115] «Perpendiculares entre sí» necesariamente, según se deduce de 90, 21-25.

gono se habrán desplazado describiendo unos conos[116]: los
92 lados AZ, AN por la superficie del cono cuya base es el círculo de diámetro ZN y su vértice el punto A; los lados ZH, MN se habrán desplazado según una superficie cónica cuya base es el círculo de diámetro MH y su vértice el punto en el que, una vez prolongadas ZH, MN, coinciden entre sí y con AΓ; y los lados BH, MΔ se habrán desplazado según una superficie cónica cuya base es el círculo de diámetro BΔ, perpendicular al círculo ABΓΔ, y su vértice el punto en el que una vez prolongadas BH, MΔ, coinciden entre sí y con ΓA. De manera semejante, también los lados que hay en el otro semicírculo se habrán desplazado según superficies cónicas semejantes, a su vez, a éstas. Y habrá quedado inscrita en la esfera una figura contenida por las superficies cónicas recién indicadas, cuya superficie será menor que la superficie de la esfera.

Pues una vez dividida la esfera por el plano correspondiente a BΔ, perpendicular al círculo ABΓΔ, la superficie de un hemisferio y la superficie de la figura inscrita en él tienen los mismos límites en un solo plano, ya que la circunferencia del círculo de diámetro BΔ, perpendicular al círculo ABΓΔ, es límite de ambas superficies. Y las dos son cóncavas hacia el mismo lado, y una de ellas está comprendida por la otra superficie y el plano que tiene los mismos límites que ella. Del mismo modo, también la superficie de la figu-
94 ra inscrita en el otro hemisferio es menor que la superficie del hemisferio.

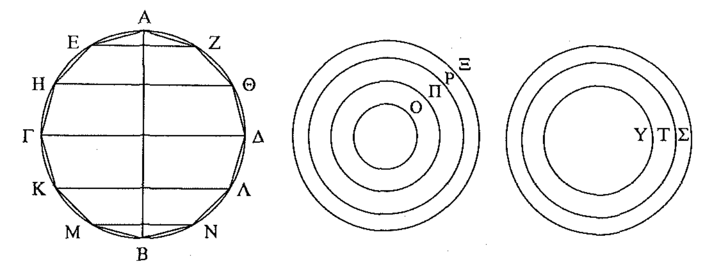
Y por tanto la superficie entera de la figura inscrita en la esfera es menor que la superficie de la esfera.

[116] En realidad, describen superficies cónicas, pero unas lo son de conos y otras de troncos de cono.

PROPOSICIÓN 24

La superficie de la figura inscrita en la esfera es igual a un círculo tal que el cuadrado de su radio equivale al rectángulo comprendido por el lado de la figura y una recta igual a la suma de las rectas que unen los lados[117] *del polígono y que son paralelas a la recta que subtiende dos lados del polígono.*

Sea ΑΒΓΔ un círculo máximo de la esfera, y en él inscríbase un polígono equilátero cuyo número de lados sea múltiplo de cuatro, y a partir del polígono inscrito considérese inscrita en la esfera una figura[118] y trácense las rectas EZ, HΘ, ΓΔ, ΚΛ, MN que sean paralelas a la recta que subtiende dos lados y póngase un círculo Ξ el cuadrado de cuyo radio equivalga al rectángulo comprendido por AE y una recta igual a la suma de EZ, HΘ, ΓΔ, ΚΛ, MN.



Digo que ese círculo es igual a la superficie de la figura inscrita en la esfera.

---

[117] Debería decir «ángulos», como ocurría más atrás, Prop. 21.

[118] La figura inscrita estaría compuesta por el cono AEZ y los troncos de cono EZHΘ, HΘΓΔ, etc.

Pónganse los círculos O, Π, P, Σ, T, Y y equivalga el cuadrado del radio de O al rectángulo comprendido por EA y la mitad de EZ; y equivalga el cuadrado del radio de Π al rectángulo comprendido por EA y la mitad de la suma de EZ, HΘ; y equivalga el cuadrado del radio de P al rectángulo comprendido por EA y la mitad de la suma de HΘ, ΓΔ; y equivalga el cuadrado del radio de Σ al rectángulo comprendido por EA y la mitad de la suma de ΓΔ, KΛ; y equivalga el cuadrado del radio de T al rectángulo comprendido por AE y la mitad de la suma de KΛ, MN; y equivalga el cuadrado del radio de Y al rectángulo comprendido por AE y la mitad de MN.

Por ello el círculo O es igual a la superficie del cono AEZ [Prop. 14]; el Π, a la superficie cónica que queda entre EZ, HΘ [Prop. 16]; el P, a la que queda entre HΘ, ΓΔ [*id.*] el Σ, a la que queda entre ΔΓ, KΛ [*id.*] y, además, el T es igual a la superficie cónica que queda entre KΛ, MN [*id.*]; y el Y es igual a la superficie de cono MBN [Prop. 14]. Luego la suma de todos los círculos es igual a la superficie de la figura inscrita.

Y es evidente que la suma de los cuadrados de los radios de O, Π, P, Σ, T, Y equivale al rectángulo comprendido por AE y dos veces la suma de las mitades de EZ, HΘ, ΓΔ, KΛ, MN, que es la suma de EZ, HΘ, ΓΔ, KΛ, MN enteras. Luego la suma de los cuadrados de los radios de los círculos O, Π, P, Σ, T, Y equivale al rectángulo comprendido por AE y la suma de todas las rectas EZ, HΘ, ΓΔ, KΛ, MN [por hipót.]. Pero también el cuadrado del radio del círculo Ξ equivale al rectángulo comprendido por AE y la recta compuesta por todas las rectas EZ, HΘ, ΓΔ, KΛ, MN; luego el cuadrado del radio del círculo Ξ equivale a la suma de los cuadrados de los radios de O, Π, P, Σ, T, Y. Luego el círculo Ξ es igual a la suma de los círculos O, Π, P, Σ, T, Y. Y se había demostrado que la suma

de los círculos Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ era igual a la superficie de la figura mencionada.

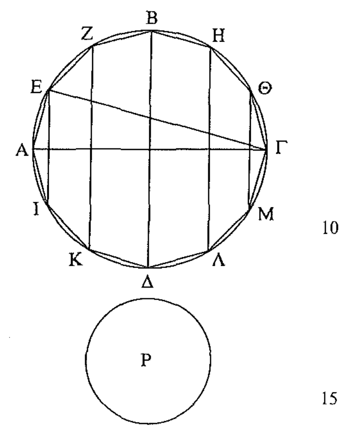
Luego el círculo Ξ será también igual a la superficie de la figura.

Proposición 25

La superficie de la figura inscrita en la esfera comprendida por superficies cónicas es menor que el cuádruplo del círculo máximo de los de la esfera. 98

Sea ΑΒΓΔ un círculo máximo en la esfera, e inscríbase en él un polígono[119] equilátero cuyo número de lados sea múltiplo de cuatro, y a partir de él considérese una superficie comprendida por superficies cónicas.

Digo que la superficie de la figura inscrita es menor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera.



Trácense las rectas ΕΙ, ΘΜ que subtienden dos lados del polígono y, paralelas a éstas, las rectas ΖΚ, ΔΒ, ΗΛ, y póngase un círculo Ρ el cuadrado de cuyo radio equivalga al rectángulo comprendido por ΕΑ y una recta igual a la suma de ΕΙ, ΖΚ, ΒΔ, ΗΛ, ΘΜ.

[119] [*De número par de ángulos*].

Por lo demostrado anteriormente [Prop. 24], el círculo es igual a la superficie de la figura mencionada. Y puesto que se había demostrado que la recta igual a la suma de ΕΙ, ΖΚ, ΒΔ, ΗΛ, ΘΜ es a ΑΓ —el diámetro del círculo— como ΓΕ a ΕΑ [Prop. 21], entonces el rectángulo comprendido por una recta igual a la suma de las rectas mencionadas y ΕΑ —es decir, el cuadrado del radio del círculo Ρ [por hipót.]— es igual al rectángulo comprendido por ΑΓ, ΓΕ [*Elem.* VI 16].

Pero el rectángulo comprendido por ΑΓ, ΓΕ es menor que el cuadrado de ΑΓ [*Elem.* III 15]; luego el cuadrado del **100** radio de Ρ es menor que el cuadrado de ΑΓ [120]. Luego el círculo Ρ es menor que el cuádruple del círculo máximo. Y se había demostrado que el círculo Ρ era igual a la superficie de la figura mencionada.

Luego la superficie de la figura es menor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera.

Proposición 26

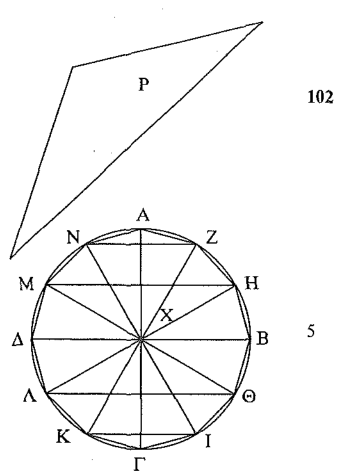
La figura inscrita en la esfera comprendida por superficies cónicas es igual al cono que tiene por base un círculo igual a la superficie de la figura inscrita en la esfera y altu-

[120] [*Luego el radio de Ρ es menor que ΑΓ; de manera que el diámetro del círculo Ρ es menor que el doble del diámetro del círculo ΑΒΓΔ, y entonces dos diámetros del círculo ΑΒΓΔ son mayores que el diámetro del círculo Ρ, y el cuádruple del cuadrado del diámetro del círculo ΑΒΓΔ —es decir, ΑΓ— es mayor que el cuadrado del diámetro del círculo Ρ. Y el cuádruplo del cuadrado de lado ΑΓ es al cuadrado del diámetro del círculo Ρ como cuatro veces el círculo ΑΒΓΔ es al círculo Ρ*]. Aunque la expresión es algo farragosa, el razonamiento es correcto.

ra igual a la perpendicular trazada desde el centro de la esfera hasta un lado del polígono.

Sea la esfera y ABΓΔ un círculo máximo en ella y lo demás igual que en la proposición anterior, y sea P un cono recto que tenga por base la superficie de la figura inscrita en la esfera y la altura igual a la perpendicular trazada desde el centro de la esfera hasta un lado del polígono.

Se ha de demostrar que el cono P es igual a la figura inscrita en la esfera.



A partir de los círculos cuyos diámetros son las rectas ZN, HM, ΘΛ, IK, constrúyanse conos que 102 tengan por vértice el centro de la esfera.

Así, habrá un rombo sólido ⟨compuesto⟩ por el cono cuya base es el círculo de diámetro ZN y su vértice el punto A y por el cono cuya base es ese mismo círculo y su vértice el punto X. Es igual al cono que tiene por base la superficie del círculo NAZ y la altura igual a la perpendicular trazada desde X[121] [Prop. 18]. Además, la figura restante en torno[122] al rombo —la comprendida por la superficie cónica que queda entre los planos paralelos correspondientes a las rectas ZN, HM y las superficies de los

[121] Entiéndase «la perpendicular trazada desde X hasta AZ».

[122] Gr. *perileleimménon.* Participio medio del verbo *perileípō,* designa el resto de una operación de sustracción entre dos elementos geométricos (líneas, áreas o volúmenes); (Cf. MUGLER, *Dictionnaire...*, art. *perileípein).* El nombre correspondiente a este adjetivo verbal sería *períleimma;* sobre este término, cf. nota a propósito en la Prop. 19.

conos ZNX y HMX— es igual al cono que tiene su base igual a la superficie cónica que queda entre los planos paralelos correspondientes a MH, ZN y la altura igual a la perpendicular trazada desde X hasta ZH. Pues eso ya se ha demostrado [Prop. 20]. Y la parte restante del cono —la comprendida por la superficie cónica que queda entre los planos paralelos correspondientes a HM, BΔ y la superficie del cono MHX y el círculo de diámetro BΔ— es igual al cono que tiene su base igual a la superficie del cono que queda entre los planos correspondientes a HM, BΔ y la altura igual a la perpendicular trazada desde X hasta BH [Prop. 19].

De modo semejante, también en la otra semiesfera el
104 rombo XKΓI y las figuras restantes en torno a los conos serán iguales a otros tantos conos de las mismas características que los conos que acabamos de describir.

Es evidente, por tanto, que también toda la figura inscrita en la esfera es igual a la suma de todos los conos indicados. Y la suma de los conos es igual al cono P, puesto que el cono P tiene una altura igual a la de cada uno de los conos dichos y la base igual a la suma de las bases de todos ellos [Lema 1 a Prop. 16].

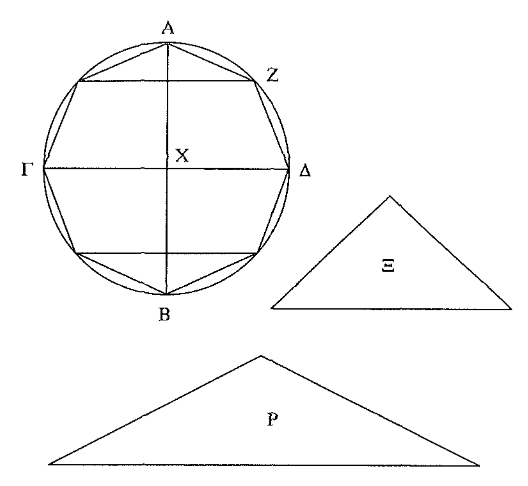
Así que es evidente que la figura inscrita en la esfera es igual al cono propuesto.

Proposición 27

La figura inscrita en la esfera comprendida por superficies cónicas es menor que el cuádruple del cono que tiene su base igual al círculo máximo de los de la esfera y su altura igual al radio de la esfera.

Sea P un cono que sea igual a la figura inscrita en la esfera, que tenga la base igual a la superficie de la figura ins-

crita y la altura igual a la perpendicular trazada desde el centro del círculo hasta un lado del polígono inscrito [Prop. 26] y sea Ξ un cono que tenga su base igual al círculo ΑΒΓΔ, y por altura el radio del círculo ΑΒΓΔ.

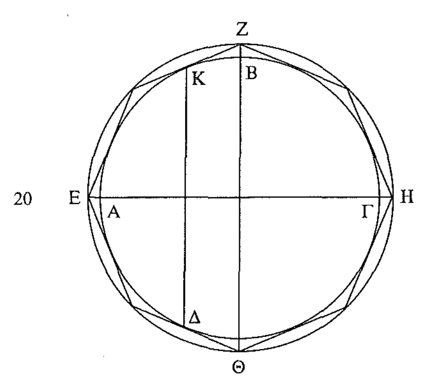


Puesto que el cono P tiene su base igual a la superficie de la figura inscrita en la esfera y su altura igual a la perpendicular trazada desde X hasta AZ y puesto que se había demostrado que la superficie de la figura inscrita es menor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera [Prop. 25], entonces la base del cono P será menor que el cuádruple de la base del cono Ξ; y también la altura del 106
cono P es menor que la altura del cono Ξ. Por tanto, puesto que el cono P tiene su base menor que el cuádruple de la base de Ξ y la altura menor que su altura, es evidente que el propio cono P es menor que el cuádruple del cono Ξ. Pero el cono P es igual a la figura inscrita [por hipót.].

Luego la figura inscrita es menor que el cuádruple del cono Ξ.

PROPOSICIÓN 28 [123]

Sea en la esfera un círculo máximo ABΓΔ y en torno al círculo ABΓΔ circunscríbase un polígono equilátero y equiángulo y sea su número de lados múltiplo de cuatro y quede comprendido el polígono circunscrito al círculo por un círculo circunscrito a él con el mismo centro que ABΓΔ.



Permaneciendo fija EH, hágase girar el plano EZHΘ en el que están el polígono y el círculo. Es evidente que la circunferencia del círculo ABΓΔ se desplazará según la superficie de la esfera, y que la circunferencia del EZHΘ se desplazará según la superficie de otra esfera con el mismo centro que la menor; y los puntos de contacto en los que son tangentes los lados describen en la esfera

[123] Como en la proposición 23, también en ésta falta el enunciado. STAMATIS —en «Αρχιμήδεια», *Platon* 19 (1967), 151— ha propuesto restituir el enunciado desaparecido en los siguientes términos: «Si se circunscribe a un círculo máximo de la esfera un polígono equilátero y equiángulo cuyo número de lados sea múltiplo de cuatro, y permaneciendo fijo el diámetro del círculo que contiene al polígono se le hace girar hasta que vuelva a la misma posición desde la que empezó a moverse, la superficie de la figura circunscrita a la esfera será mayor que la superficie de la esfera».

menor círculos perpendiculares al círculo ΑΒΓΔ y los ángulos del polígono —salvo los que tienen por vértice los puntos Ε, Η— se desplazarán por la superficie de la esfera mayor según las circunferencias de círculos trazados perpendiculares al círculo ΕΖΗΘ, y los lados del polígono se 108
desplazarán según superficies cónicas como en las proposiciones anteriores a ésta [Prop. 23-27]. Entonces, la figura comprendida por las superficies cónicas estará circunscrita a la esfera menor e inscrita en la mayor.

Que la superficie de la figura circunscrita es mayor que la superficie de la esfera se demostrará así:

Sea la recta ΚΔ el diámetro de un círculo de los de la esfera menor, siendo Κ, Δ los puntos en los que los lados del polígono circunscrito son tangentes al círculo ΑΒΓΔ. Dividida la esfera mediante el plano que pasa por ΚΔ, perpendicular al círculo ΑΒΓΔ, también la superficie de la figura circunscrita a la esfera quedará cortada mediante el plano. Y es evidente que tienen los mismos límites en un plano, pues el límite de ambas figuras planas es la circunferencia del círculo de diámetro ΚΔ y perpendicular al círculo ΑΒΓΔ. Y ambas superficies son cóncavas hacia el mismo lado, y una de ellas está comprendida por la otra superficie y la de la figura plana que tiene los mismos límites. Luego la superficie comprendida del casquete de esfera es menor que la superficie de la figura circunscrita a ella [Post. 4].

De manera semejante, también la superficie del casquete restante de la esfera es menor que la superficie de la figura circunscrita a ella.

Por tanto, es evidente que también la superficie entera de la esfera es menor que la superficie de la figura circunscrita a ella.

110 PROPOSICIÓN 29

La superficie de la figura circunscrita a la esfera es igual a un círculo ⟨tal que⟩ el cuadrado de su radio equivale al rectángulo comprendido por un lado del polígono y una recta igual a la suma de todas las que unen los ángulos del polígono y son paralelas a una de las rectas que subtienden dos lados del polígono.

La figura circunscrita a la esfera menor está inscrita en la esfera mayor[124].

Y se ha demostrado que la superficie de la figura inscrita en la esfera comprendida por las superficies cónicas es igual a un círculo ⟨tal que⟩ el cuadrado de su radio equivale al rectángulo comprendido por un lado del polígono y una recta igual a la suma de todas las rectas que unen los ángulos del polígono y son paralelas a alguna de las que subtienden dos lados del polígono [Prop. 24].

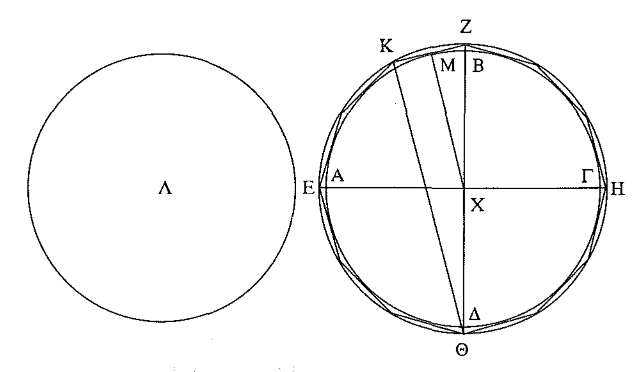
Luego es evidente lo recién dicho.

PROPOSICIÓN 30

La superficie de la figura circunscrita a la esfera es mayor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera.

[124] También en esta proposición se han producido alteraciones: ni siquiera se advierte al lector —como suele hacer Arquímedes en ocasiones semejantes— de que en esta demostración se utiliza la misma construcción que en la proposición anterior.

Sean la esfera y el círculo y lo demás lo mismo que en las proposiciones anteriores, y el círculo Λ sea igual a la superficie de la figura propuesta circunscrita a la esfera menor.



Puesto que en el círculo EZHΘ se ha inscrito un polígono equilátero de número par de ángulos, la suma de las rectas que unen los lados del polígono y que son paralelas a ZΘ guardan con ZΘ la misma razón que ΘK con KZ [Prop. 21]. 112
Por tanto, la figura comprendida por un lado del polígono y la recta igual a la suma de todas las que unen los ángulos del polígono es igual al rectángulo comprendido por ZΘK [*Elem.* VI 16].

De manera que el cuadrado del radio del círculo Λ equivale al rectángulo comprendido por ZΘK [Prop. 29]. Por tanto, el radio del círculo Λ es mayor que ΘK[125]. Y ΘK es igual al diámetro del círculo ABΓΔ[126].

[125] Ya que ZΘ > ΘK (*Elem.* III 15).

[126] Heiberg secluye del texto la frase [*Porque es el doble de XM, que es el radio del círculo ABΓΔ*] que aparece en este punto del texto, ya que parece haber sido incluida en él por un copista conocedor del correspondiente *Comentario* de Eutocio (36, 22 y ss.).

Por tanto es evidente que el círculo Λ —es decir, la superficie de la figura circunscrita a la esfera menor— es mayor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera.

Proposición 31

La figura circunscrita a la esfera menor es igual a un cono que tiene por base un círculo igual a la superficie de la figura y la altura igual al radio de la esfera.

La figura circunscrita a la esfera menor está inscrita en la esfera mayor. Y se ha demostrado que la figura inscrita comprendida por superficies cónicas es igual a un cono que tiene por base un círculo igual a la superficie de la figura y la altura igual a la perpendicular trazada desde el centro de la esfera hasta un lado del polígono. Y esta recta es igual al radio de la esfera menor [Prop. 26].

Luego es evidente lo propuesto.

114 COROLARIO

A partir de esto está claro que la figura circunscrita a la esfera menor es mayor que el cuádruple del cono que tiene por base el círculo máximo de los de la esfera y por altura el radio de la esfera[127].

---

[127] Heiberg, que secluye por redundantes los pasajes que recogemos en las dos notas siguientes, sospecha que se deba secluir también el texto desde este punto hasta el final del corolario argumentando que lo característico de los corolarios es, precisamente, no requerir demostración.

Puesto que la figura es igual a un cono que tiene su base igual a la superficie de esa figura y la altura igual[128] al radio de la esfera menor [Prop. 31], la superficie de la figura circunscrita a la esfera es mayor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera [Prop. 30]; luego la figura circunscrita en torno a la esfera será mayor que el cuádruple del cono que tiene por base el círculo máximo y por altura el radio de la esfera, puesto que también el cono que es igual a ella es mayor que el cuádruple del cono dicho[129].

Proposición 32

Si hay en la esfera una figura inscrita y otra circunscrita, construidas a partir de polígonos semejantes de la misma manera que en las proposiciones anteriores, la superficie de la figura circunscrita guarda con la superficie de la inscrita una razón que es el cuadrado de la que guardan el lado del polígono circunscrito al círculo máximo con el lado del polígono inscrito en el mismo círculo; y la propia figura[130] *guarda con la figura una razón que es el cubo de aquella misma razón.*

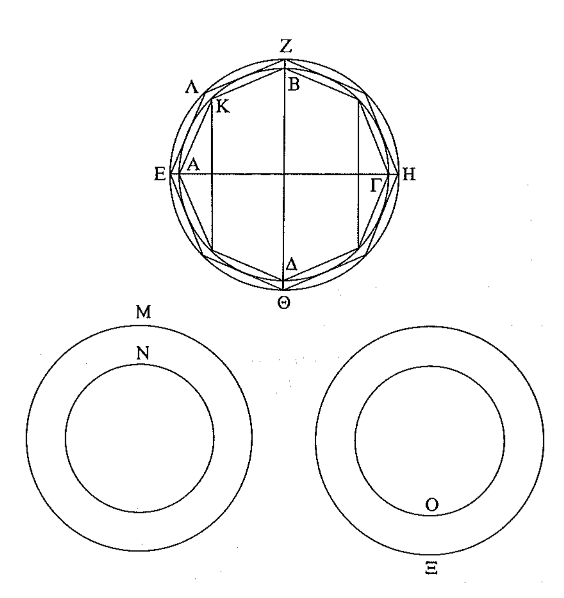
Sea en la esfera el círculo ΑΒΓΔ, e inscríbase en él un 116
polígono equilátero y sea múltiplo de cuatro su número de lados, y circunscríbase al círculo otro semejante al inscrito; y además, sean los lados del polígono circunscrito tangentes al círculo en el punto medio de los arcos cortados por los

[128] [*A la perpendicular trazada desde el centro de la esfera hasta un lado del polígono, es decir*].

[129] [*Pues tiene la base mayor que el cuádruple y la misma altura*].

[130] [*Circunscrita*].

lados del polígono inscrito; y sean EH, ZΘ diámetros mutuamente perpendiculares del círculo que comprende al polígono circunscrito y estén dispuestos de modo semejante a los diámetros AΓ, BΔ y considérese que se trazan rectas que unan los ángulos opuestos del polígono y que sean paralelas entre sí y a ZBΔΘ. Si, permaneciendo fijo el diámetro EH, se desplazan en torno a la circunferencia del círculo los perímetros de los polígonos, una figura estará inscrita en la esfera y la otra circunscrita.



Se ha de demostrar que la superficie de la figura circunscrita guarda con la superficie de la inscrita una razón que es el cuadrado de la razón de EΛ con AK, y que la figura circunscrita guarda con la inscrita una razón que es el cubo de la misma razón.

Sea el círculo M igual a la superficie de la figura circunscrita a la esfera y el N igual a la superficie de la inscrita. Entonces, el cuadrado del radio de M equivale al rectángulo comprendido por ΕΛ y una recta igual a la suma de todas las que unen los ángulos del polígono circunscrito [Prop. 29]; y el cuadrado del radio de N equivale al rectángulo comprendido por ΑΚ y una recta igual a la suma de todas las que unen los ángulos[131] [Prop. 24]. 118
Y puesto que los polígonos son semejantes, también serían semejantes las áreas comprendidas por las líneas dichas[132].

Por tanto es evidente que la superficie de la figura circunscrita a la esfera guarda con la superficie de la figura inscrita en la esfera una razón que es el cuadrado de la razón de ΕΛ con ΑΚ.

Tómense dos conos Ο, Ξ y sea el cono Ξ, que tiene por base el círculo Ξ, igual a M, y el cono Ο, que tiene por base el círculo Ο, igual a N; y por altura tengan el cono Ξ el radio de la esfera y el cono Ο la perpendicular trazada desde el centro al lado ΑΚ.

Entonces, el cono Ξ es igual a la figura circunscrita a la esfera [Prop. 31] y el cono Ο, a la inscrita [Prop. 26][133]. Y puesto que los polígonos son semejantes [por hipót.], ΕΛ guarda con ΑΚ la misma razón que el radio de la esfera con 120

[131] «Del polígono inscrito», se entiende.

[132] [*Es decir, por las que van hasta los ángulos o los lados de los polígonos, de manera que guardan entre sí la misma razón, a saber: el cuadrado de la que guardan los lados de los polígonos. Pero también la razón que guardan los rectángulos comprendidos por las líneas indicadas es el cuadrado de la que guardan entre sí los radios de los círculos* M, N; *de manera que también los diámetros de* M, N *guardan la misma razón que los lados de los polígonos. Y los círculos que son iguales a las superficies del circunscrito y del inscrito guardan entre sí una razón que es la de los cuadrados de sus diámetros*].

[133] [*Eso ya se ha demostrado*].

la perpendicular trazada desde el centro de la esfera hasta AK. Luego la altura del cono Ξ guarda con la altura del cono O la misma razón que EΛ con AK. Por otro lado, el diámetro del círculo M guarda con el diámetro del círculo N la misma razón que guarda EΛ con AK. Luego los diámetros de las bases de los conos Ξ, O guardan la misma razón que las alturas[134] y por eso el cono Ξ guarda con el cono O una razón que es el cubo de la del diámetro del círculo M con el diámetro del círculo N [*Elem.* XII 12].

Es evidente, por tanto, que también la figura circunscrita guardará con la inscrita una razón que será el cubo de la de EΛ con AK.

Proposición 33

La superficie de toda esfera es el cuádruple del círculo máximo de los que hay en ella.

Haya una esfera y sea el círculo A el cuádruple de su círculo máximo.

Digo que el círculo A es igual a la superficie de la esfera.

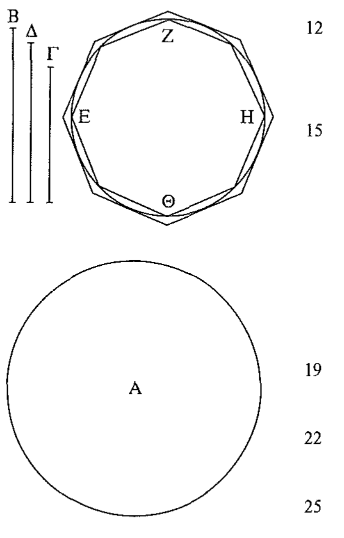
Pues si no, o es mayor o es menor.

Sea primero mayor la superficie de la esfera que la del círculo.

La superficie de la esfera y el círculo A son dos magnitudes desiguales; entonces es posible tomar dos rectas desiguales de tal manera que la mayor guarde con la menor una razón menor que la que guarda la superficie de la esfera con el círculo [Prop. 2]. Tómense las rectas B, Γ y sea Δ media proporcional
122 cional de B, Γ; y considérese la esfera cortada mediante un

134 [*Pues son semejantes*].

plano que pase por el centro según el círculo EZHΘ, y considérese en el círculo un polígono inscrito y otro circunscrito de manera que el circunscrito sea semejante al polígono inscrito y que el lado del circunscrito guarde una razón menor[135] que 5
la que guarda B con Δ [Prop. 3][136].



Entonces, la superficie de la 12
figura circunscrita a la esfera guarda con la superficie de la figura inscrita una razón menor que la 15
superficie de la esfera con el círculo A. Lo cual es imposible, pues la superficie de la figura circunscrita es mayor que la superficie de la esfera [Prop. 28], mientras que la superficie de la figura inscrita es menor que el círculo A [Prop. 19
25][137].

Luego la superficie de la esfera 22
no es mayor que el círculo A.

Y afirmo que tampoco es 25
menor.

Pues si es posible, séalo.

[135] Entiéndase «guarde ⟨con el lado del polígono inscrito⟩ una razón menor...». La misma falta se produce repetidamente, y hemos de tomarla por omisión del transcriptor.

[136] *[Y entonces el cuadrado de la razón es menor que el cuadrado de la razón. Y la razón de B a Γ es el cuadrado de la de B a Δ, y la de la superficie del sólido circunscrito con la superficie del inscrito es el cuadrado de la del lado del polígono circunscrito con el lado del inscrito].*

[137] *[Pues se ha demostrado que la superficie de la inscrita es menor que el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera, y el cuádruple del círculo máximo es el círculo A]:* La interpolación recoge lo demostrado en la Prop. 25.

E, igualmente, hállense las rectas B, Γ de manera que B guarde con Γ una razón menor que la que guarda el círculo A con la superficie de la esfera [Prop. 2], y sea Δ media pro-
124 porcional de B, Γ; e inscríbanse y circunscríbanse de nuevo[138] de manera que la superficie del circunscrito guarde[139] una razón menor que B con Δ [Prop. 3][140].

Por tanto, la superficie de la figura circunscrita guarda con la superficie de la inscrita una razón menor que[141] el círculo A con la superficie de la esfera. Lo cual es imposible, pues la superficie de la figura circunscrita es mayor que el círculo A [Prop. 30], y la superficie de la inscrita menor que la superficie de la esfera [Prop. 23].

Luego la superficie de la esfera no es menor que el círculo A. Y se había demostrado que tampoco era mayor. Luego la superficie de la esfera es igual al círculo A, es decir, al cuádruple del círculo máximo.

Proposición 34

La esfera entera es el cuádruple del cono que tiene la base igual al círculo máximo de los de la esfera y por altura el radio de la esfera.

Sea una esfera y en ella el círculo máximo ABΓΔ.

---

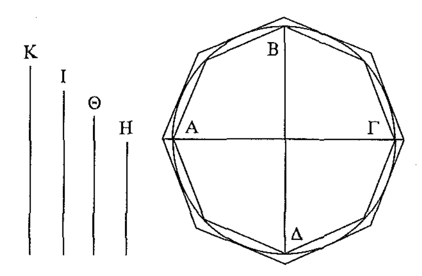
[138] «Polígonos semejantes», se entiende.

[139] Como más atrás, entiéndase «guarde ⟨con la superficie del inscrito⟩ una razón menor...».

[140] [*Luego también sus cuadrados*].

[141] [*B con Γ. Y B guarda con Γ una razón menor que*].

Si la esfera no es el cuádruple del cono indicado, sea, si es posible, mayor que el cuádruple.



Sea el cono Ξ, que tiene por base el cuádruple del círculo ΑΒΓΔ y la altura igual al radio de la esfera.



Así, la esfera es mayor que el cono Ξ. La esfera y el cono serán dos magnitudes desiguales. Entonces, es posible tomar dos rectas desiguales de manera que la mayor guarde con la menor una razón menor que la que guarda la esfera con el cono Ξ [Prop. 2]. Sean tomadas las rectas Κ, Η y, por otro lado, las rectas Ι, Θ de manera que unas a otras se exce- 126
dan en la misma magnitud, la recta Κ a la Ι y la Ι a la Θ y la Θ a la Η[142], y considérense además en el círculo ΑΒΓΔ un polígono inscrito, cuyo número de lados sea múltiplo de cuatro, y otro circunscrito semejante al inscrito, igual que en las proposiciones anteriores, y guarde el lado del polígono circunscrito con el del inscrito una razón menor que la que guarda Κ con Ι [Prop. 3], y sean ΑΓ, ΒΔ diámetros perpendiculares entre sí.

[142] «La cuestión propuesta consiste en, dadas dos rectas, hallar dos términos proporcionales en proporción aritmética» (EUT., 40, 10 y ss.).

Entonces si, permaneciendo fijo el diámetro ΑΓ, se desplaza en torno a él el plano en que están los polígonos, habrá unas figuras —una inscrita en la esfera y otra circunscrita— y la circunscrita guardará con la inscrita una razón que es el cubo de la que guarda el lado del polígono circunscrito con el del inscrito en el círculo ΑΒΓΔ [Prop. 32]. Y el lado guarda con el lado una razón menor que la que guarda Κ con Ι [por hipót.]. De manera que la figura circunscrita guarda[143] una razón menor que el cubo de la razón de Κ con Ι. También Κ guarda con Η una razón mayor que el cubo de la que guarda Κ con Ι[144]. Entonces, con mayor motivo, la figura circunscrita guarda con la inscrita una razón menor que la que guarda Κ con Η. Y Κ guarda con Η una razón menor que la que guarda la esfera con el cono Ξ [por hipót.]. Y lo mismo tomando la proporción en alternancia [*Elem.* V 16]: lo cual es imposible. Pues la figura circunscrita es mayor que la esfera [Prop. 28] y la inscrita menor que el cono Ξ [Prop. 27][145].

128 Luego la esfera no es mayor que el cuádruple del cono dicho.

Sea, si es posible, menor que el cuádruple, de manera que la esfera sea menor que el cono Ξ.

Tómense las rectas Κ, Η de manera que Κ sea mayor que Η y guarde con ella una razón menor que la que guarda el cono Ξ con la esfera [Prop. 2] y pónganse las rectas Θ, Ι como antes y considérense en el círculo ΑΒΓΔ un polígono inscrito y otro circunscrito, de manera que el lado del circuns-

[143] Sobreentiéndase: «con la inscrita».

[144] [*Esto se hace evidente mediante los lemas*].

[145] [*Porque el cono Ξ es el cuádruple del cono que tiene su base igual al círculo ΑΒΓΔ y la altura igual al radio de la esfera, mientras que la figura inscrita es menor que el cuádruple de dicho cono*]: la interpolación admite como argumento la tesis pendiente de prueba.

crito guarde con el lado del inscrito una razón menor que la que guarda K con I [Prop. 3], y esté lo demás dispuesto del mismo modo que en las proposiciones anteriores.

Entonces también la figura sólida circunscrita guardará con la inscrita una razón que sea el cubo de la que guarda el lado del polígono circunscrito al círculo ΑΒΓΔ con el del inscrito [Prop. 32]. Y el lado guarda con el lado una razón menor que la que guarda K con I [por hipót.]. Por tanto, la figura circunscrita guardará con la inscrita una razón menor que el cubo de la que guarda K con I. Y K guarda con H una razón mayor que el cubo de la que guarda K con I[146]. De modo que la figura circunscrita guarda con la inscrita una razón menor que la de K con H. Y K guarda con H una razón menor que el cono Ξ con la esfera [por hipót.]. Lo cual es imposible, pues la figura inscrita es menor que la esfera [Prop. 28] y la circunscrita mayor que el cono Ξ [Prop. 31, corol.].

Luego la esfera tampoco es menor que el cuádruple del cono que tiene la base igual al círculo ΑΒΓΔ y la altura igual al radio de la esfera. Y se había demostrado que tampoco era mayor. Luego es el cuádruple.

COROLARIO

Una vez demostrado lo anterior, es evidente que todo cilindro que tenga por base el círculo máximo de los de la esfera y la altura igual al diámetro de la esfera es una vez y media la esfera, y su superficie, incluidas las bases, es una vez y media la superficie de la esfera.

---

[146] V. más atrás, n. 144.

El cilindro antes indicado es el séxtuple del cono que tiene la misma base y la altura igual al radio, y se ha demostrado que la esfera es el cuádruple de ese mismo cono [Prop. 34]. *Es evidente, por tanto,* que el cilindro es una vez y media la esfera.

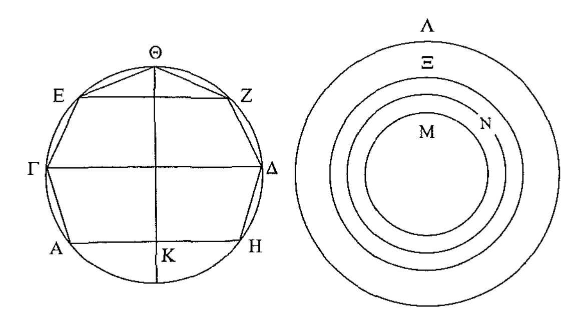
Y a la vez, puesto que se ha demostrado que la superficie del cilindro sin las bases es igual a un círculo cuyo radio es media proporcional entre la generatriz del cilindro y el diámetro de la base [Prop. 13], y que la generatriz del mencionado cilindro circunscrito a la esfera es igual al diámetro de la base[147], y que el círculo que tiene el radio igual al diámetro de la base es el cuádruple de la base [*Elem.* XII 2] —es decir, del círculo máximo de los de la esfera—, entonces la superficie del cilindro excluidas las bases será el cuádruple del círculo máximo. Entonces la superficie entera del cilindro incluidas las bases será el séxtuple del círculo
132 máximo. Y también la superficie de la esfera es el cuádruple del círculo máximo. Luego toda la superficie del cilindro es una vez y media la superficie de la esfera.

Proposición 35

La superficie de la figura inscrita en un casquete de la esfera es igual a un círculo el cuadrado de cuyo radio equivale al rectángulo comprendido por un lado del polígono inscrito en el segmento del círculo máximo y la recta igual a la suma de todas las paralelas a la base del segmento más la mitad de la base del segmento.

[147] [*Es evidente que la media proporcional de ambos es igual al diámetro de la base*].

Sea una esfera y en ella un casquete cuya base sea el círculo del diámetro ΑΗ[148], y sea ΑΗΘ un círculo máximo y ΑΓΕΘΖΔΗ un polígono con un número par de lados[149] excepto el lado ΑΗ, y tómese el círculo Λ, el cuadrado de cuyo radio equivale al rectángulo comprendido por el lado ΑΓ y por la suma de ΕΖ, ΓΔ más la mitad de la base, es decir, de ΑΚ.



Se ha de demostrar que el círculo es igual a la superficie de la figura.

Tómese el círculo Μ, el cuadrado de cuyo radio equivale al rectángulo comprendido por el lado ΕΘ y la mitad de ΕΖ. El círculo Μ es igual a la superficie del cono cuya base es el círculo de diámetro ΕΖ y su vértice el punto Θ [Prop. 14]. Tómese también otro círculo Ν, el cuadrado de cuyo radio equivalga al rectángulo comprendido por ΕΓ y la mitad de la suma de ΕΖ, ΓΔ. Entonces, éste será igual a la superfi- 134
cie del tronco de cono comprendido entre los planos paralelos correspondientes a ΕΖ, ΓΔ [Prop. 16]. E, igualmente, tómese otro círculo Ξ el cuadrado de cuyo radio equivale al rectángulo comprendido por ΑΓ y la mitad de la suma de ΓΔ, ΑΗ. Y éste también es igual a la superficie troncocónica

[148] [*Inscríbase en él una figura, como se ha dicho, comprendida por superficies cónicas*].

[149] Se ha de sobreentender «y equilátero».

comprendida entre los planos paralelos correspondientes a AH, ΓΔ [Prop. 16].

Entonces, la suma de todos los círculos será igual a la superficie entera de la figura, y la suma de los cuadrados de sus radios equivaldrá al rectángulo comprendido por un lado, AΓ, y una recta igual a la suma de EZ, ΓΔ más la mitad de la base AK. Y el cuadrado del radio del círculo Λ equivalía a esa misma área [por hipót.].

Luego el círculo Λ será igual a la suma de los círculos M, N, Ξ, de manera que también a la superficie de la figura inscrita.

Proposición 36[150]

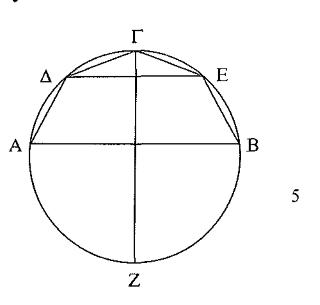
Córtese la esfera mediante un plano que no pase por el centro y sea en ella AEZ un círculo máximo que corta perpendicularmente al plano secante, e inscríbase en el segmento ABΓ un polígono equilátero y de número par de ángulos[151] excepto la base AB.

De modo semejante a las proposiciones anteriores [Prop. 23], si, permaneciendo fija ΓZ, se hace girar la figura, los ángulos Δ, E, A, B se trasladarán según círculos cuyos diámetros serán ΔE, AB; y los lados del segmento se trasladarán

[150] La evidente forma anómala de la proposición —carente de enunciado, con varias faltas de expresión, trastocada de lugar (su sitio adecuado sería intercambiar la posición con la Prop. 35)— y los resultados, bien pobres para los que suele alcanzar Arquímedes, han hecho pensar en una actuación especialmente incorrecta del transcriptor e, incluso, en la posibilidad de que toda ella haya de ser secluida.

[151] De acuerdo con la expresión que sigue, «excepto la base», aquí esperaríamos un «de número par de lados».

según una superficie cónica[152]; y la figura resultante será un sólido comprendido por superficies cónicas que tendrá por 136
base un círculo cuyo diámetro es AB y su vértice Γ.



Al igual que en las proposiciones anteriores, tendrá la superficie menor que la superficie del casquete que lo contiene. Pues ambos —el casquete y la figura— tienen el mismo límite en el plano —la circunferencia del círculo cuyo diámetro es AB— y ambas superficies son cóncavas hacia el mismo lado y la una está comprendida por la otra [Postul. 4].

Preposición 37

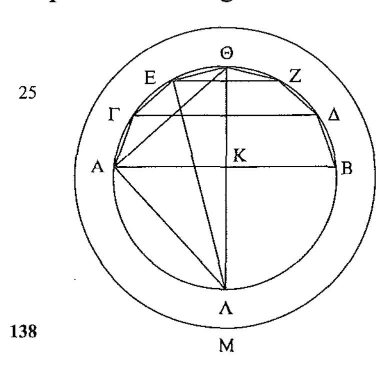
La superficie de la figura inscrita en el casquete de la esfera es menor que el círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete hasta la circunferencia del círculo que es la base del casquete.

Sea una esfera y en ella el círculo máximo ABEZ, y sea un casquete en la esfera cuya base sea el círculo de diámetro AB[153] y lo demás, igual, siendo ΘΛ el diámetro de la esfera, y trazadas las cuerdas ΛE, ΘA; y sea M un círculo cuyo radio sea igual a AΘ.

[152] Evidentemente, como ya hizo notar Heiberg, se trasladarán según «superficies cónicas», no según una sola.

[153] *[E inscríbase en él la figura dicha y un polígono en el segmento de círculo].*

Se ha de demostrar que el círculo M es mayor que la superficie de la figura.



Se ha demostrado que la superficie de la figura es igual a un círculo el cuadrado de cuyo radio equivale al rectángulo comprendido por EΘ y la suma de EZ, ΓΔ, KA [Prop. 35]. Por otro lado, se ha demostrado que el rectángulo comprendido por EΘ
138 y la suma de EZ, ΓΔ, KA es igual al rectángulo comprendido por EΛ, KΘ [Prop. 22, *Elem.* VI 16]. Y el rectángulo comprendido por EΛ, KΘ es menor que el cuadrado de lado AΘ [154].

Por tanto, está claro que el radio del círculo que es igual a la superficie de la figura es menor que el radio de M.

Luego es evidente que el círculo M es mayor que la superficie de la figura [*Elem.* XII 2].

Proposición 38

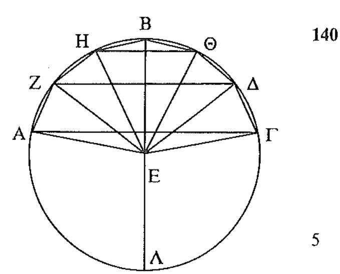
La figura inscrita en el casquete comprendida por superficies cónicas más el cono que tiene por base la misma que la figura y por vértice el centro de la esfera es igual al cono que tiene su base igual a la superficie de la figura y la altura igual a la perpendicular trazada desde el centro de la esfera hasta un lado de los del polígono.

---

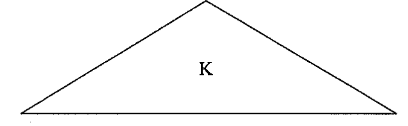
[154] [*Pues es menor que el rectángulo comprendido por ΑΘ, ΚΘ*].

Sea una esfera y en ella un círculo máximo y un segmento ABΓ menor que un semicírculo y sea E el centro, e inscríbase en el segmento ABΓ un polígono de número par de lados[155] excepto AΓ, igual que en las proposiciones anteriores y, permaneciendo fija BΛ, produzca la esfera, al desplazarse alrededor, una figura comprendida por superficies cónicas, y a partir del círculo de diámetro AΓ constrúyase un cono que tenga por vértice el centro; y tómese el cono K que tenga la base igual a la superficie de la figura y la altura igual a la perpendicular trazada desde el centro E hasta un lado del polígono.

Se ha de demostrar que el **140**
cono K es igual a la figura comprendida[156] junto con el cono AEΓ.



Constrúyanse también conos sobre los círculos de diámetros ΘH, ΔZ que tengan por vértice el punto E. Entonces, el rombo sólido HBΘE es igual a un cono cuya base es igual a la superficie del cono HBΘ, y la altura igual a la perpendicular trazada



desde E hasta HB [Prop. 18], y la figura circundante[157], comprendida por la superficie que queda entre los planos paralelos correspondientes a HΘ, ZΔ y las superficies cónicas ZEΔ, HEΘ, es igual al cono cuya base es igual a la superficie que

155 La mayor parte de los editores suplen: «y equilátero».

156 Entiéndase: «comprendida por las superficies cónicas».

157 Gr. *períleimma:* cf. n. 98 a la Prop. 19.

queda entre los planos paralelos correspondientes a ΗΘ, ΖΔ y la altura igual a la perpendicular trazada desde Ε hasta ΖΗ [Prop. 20]. A la vez, la figura circundante comprendida por la superficie que queda entre los planos paralelos correspondientes a ΖΔ, ΑΓ y las superficies cónicas ΑΕΓ, ΖΕΔ, es igual a un cono cuya base es igual a la superficie que queda entre los planos paralelos correspondientes a ΖΔ, ΑΓ y la altura igual a la perpendicular trazada desde Ε hasta ΖΑ [Prop. 20]. Entonces, la suma de los conos mencionados será igual
142 a la figura más el cono ΑΕΓ. Y tienen la altura igual a la perpendicular trazada desde Ε hasta un lado del polígono, y las bases iguales a la superficie de la figura ΑΖΗΒΘΔΓ; y el cono Κ tiene también la misma altura y la base igual a la superficie de la figura. Luego el cono es igual a la suma de los conos mencionados. Y se había demostrado que la suma de los conos mencionados era igual a la figura más el cono ΑΕΓ.

Luego también el cono Κ es igual a la figura más el cono ΑΕΓ.

COROLARIO

A partir de esto es evidente que el cono que tiene por base el círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete hasta la circunferencia del círculo que es base del casquete y la altura igual al radio de la esfera, es mayor que la figura inscrita más el cono.

Y[158] es que el cono recién mencionado es mayor que el cono que es igual a la suma de la figura más el cono que

---

[158] Para Heiberg, el texto que sigue hasta el fin del corolario debería quizá ser secluido: en efecto, si el corolario es una deducción evidente de lo anterior y no requiere demostración, lo que sigue es superfluo.

tiene por base la base del casquete y el vértice en el centro, es decir, el cono que tiene la base igual a la superficie de la figura y la altura igual a la perpendicular trazada desde el centro hasta un lado del polígono [Prop. 38]. Pues la base es mayor que la base[159] y la altura mayor que la altura [Prop. 37].

PROPOSICIÓN 39

Sea una esfera y en ella el círculo máximo ABΓ, y córtese[160] menor que un semicírculo, el que corta AB, y sea Δ su centro[161]; y desde el centro Δ trácense las rectas AΔ, ΔB hasta A, B, y circunscríbase al sector resultante un polígono[162], y 144
en torno a él un círculo. Tendrá el mismo centro que el círculo ABΓ. Si, permaneciendo fija EK, el polígono, tras girar en torno a ella, vuelve a la misma posición, el círculo circunscrito se desplazará según la superficie de una esfera y los ángulos del polígono describirán círculos cuyos diámetros, que son paralelos a AB, unen los ángulos del polígono, mientras que los puntos en los que los lados del polígono son tangentes al círculo menor describen círculos en la esfera menor cuyos diámetros serán las rectas, paralelas a AB, que unen los puntos de tangencia, y los lados se desplazarán según superficies cónicas, y la figura circunscrita cuya base es

[159] [*Eso ya se ha demostrado*].

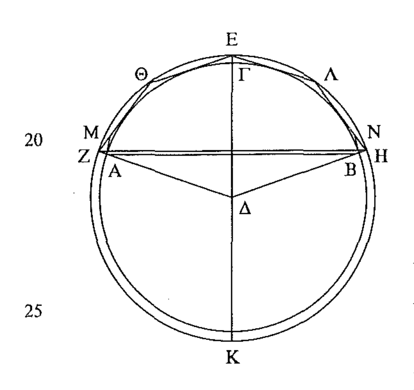
[160] Sobreentiéndase «un casquete».

[161] «Centro de la esfera», se entiende.

[162] Probablemente, la redacción original del texto de Arquímedes no omitía indicar que el polígono ha de ser equilátero y de número par de lados, excepto el correspondiente a la base del sector.

el círculo de diámetro ZH estará comprendida por superficies cónicas.

La superficie de dicha figura es mayor que la superficie del casquete menor cuya base es el círculo de diámetro AB.



Trácense las tangentes AM, BN. Se desplazarán según una superficie cónica, y la figura generada por el polígono AMΘEΛNB tendrá la superficie mayor que la del casquete de la esfera cuya base es el círculo de diámetro AB[163] [Post. 4]. Pero la superficie cónica generada por ZM, HN es mayor que la generada por MA, NB. Pues ZM es mayor que MA[164], y NH es mayor que NB [*Elem.* III 18 y I 19]; y cuando esto se da, una
146 superficie es mayor que la otra superficie[165].

Y es evidente, por tanto, que la superficie de la figura circunscrita es mayor que la superficie del casquete de la esfera menor.

COROLARIO

Y está claro que la superficie de la figura circunscrita al sector es igual al círculo el cuadrado de cuyo radio equivale

[163] [*Tienen el mismo límite en un solo plano —el círculo de diámetro AB— y el casquete está contenido por la figura*].

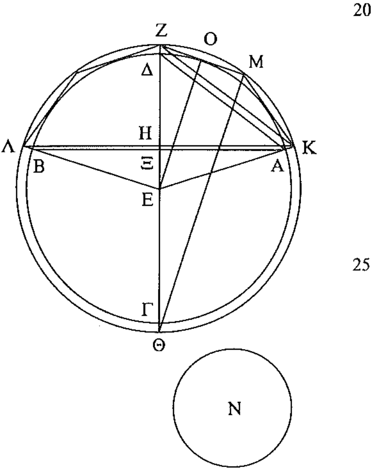
[164] [*Pues subtiende un ángulo recto*].

[165] [*Pues esto se ha demostrado en los lemas*].

al rectángulo comprendido por un lado del polígono y la suma de todas las cuerdas que unen los ángulos del polígono más la mitad de la base del polígono mencionado[166] [Prop. 35].

Proposición 40

La superficie de la figura circunscrita al sector es mayor que el círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete hasta la circunferencia del círculo que es base del casquete.



Sea una esfera y en ella un círculo máximo ΑΒΓΔ y el centro Ε, y circunscríbase al sector el polígono ΛΚΖ, y en torno a él circunscríbase un círculo y resulte una figura como antes; y sea Ν un círculo el cuadrado de cuyo radio equivalga al rectángulo comprendido por un lado del polígono y la suma de todas las cuerdas[167] más la mitad de ΚΛ.

Pero el área indicada es igual al rectángulo comprendido 148
por ΜΘ y ΖΗ [Prop. 22 y *Elem.* VI 16][168]. Entonces, el cua-

[166] *[Pues la figura descrita por el polígono está inscrita en el casquete de la esfera mayor]. [Eso está claro por lo escrito más atrás].*

[167] Como en las proposiciones de más atrás, se refiere a las «cuerdas que subtienden los ángulos formados por cada dos lados del polígono».

[168] *[Que es la altura del casquete de la esfera mayor, pues eso se ha demostrado anteriormente].*

drado del radio del círculo Ν equivale al rectángulo comprendido por ΜΘ, ΗΖ. Pero ΗΖ es mayor que ΔΞ [169], y ΜΘ es igual al diámetro ΓΔ [170], y el rectángulo comprendido por ΓΔ, ΔΞ es igual al cuadrado de lado ΑΔ.

Luego la superficie de la figura ΚΖΛ es mayor que el círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete hasta la circunferencia del círculo que es la base del casquete, el de diámetro ΑΒ. Pues el círculo Ν es igual a la superficie de la figura circunscrita al sector [Prop. 39, corol.].

COROLARIO 1

Y la figura circunscrita al sector más el cono cuya base es el círculo de diámetro ΚΛ y su vértice el centro, es igual al cono cuya base es igual a la superficie de la figura y su altura ⟨igual⟩ a la perpendicular trazada desde el centro hasta un lado [171] [Prop. 38].

---

[169] [*Que es la altura del casquete menor. Pues si trazamos la cuerda* ΚΖ *será paralela a* ΔΑ. *Y también* ΑΒ *es paralela a* ΚΛ *y* ΖΕ *es común. Luego el triángulo* ΖΚΗ *es semejante al triángulo* ΔΑΞ *(Elem.* I 29, VI 4, V 16, V 14). *Y* ΖΚ *es mayor que* ΑΔ*; luego también* ΖΗ *es mayor que* ΔΞ*]*.

[170] [*Pues si se traza* ΕΟ, *dado que* ΜΟ *es igual a* ΟΖ *(Elem.* III 3) *y* ΘΕ *a* ΕΖ, *entonces* ΕΟ *es paralela a* ΜΘ *(Elem.* VI 2); *luego* ΜΘ *es el doble de* ΕΟ. *Y también* ΓΔ *es el doble de* ΕΟ*; luego* ΜΘ *es igual a* ΓΔ].

[171] [*La cual perpendicular es igual al radio de la esfera, pues la figura circunscrita al sector está inscrita en el casquete de la esfera mayor cuyo centro es el mismo. Lo dicho es evidente a partir de lo escrito antes*].

COROLARIO 2 150

A partir de esto es evidente que la figura circunscrita más el cono es mayor que un cono que tenga por base el círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete de la esfera menor hasta la circunferencia del círculo que es la base del casquete, y su altura ⟨igual⟩ al radio. Pues el cono igual a la figura más el cono tendrá la base mayor que el círculo mencionado [Prop. 40] y la altura igual al radio de la esfera menor [Prop. 40, corol.].

PROPOSICIÓN 41

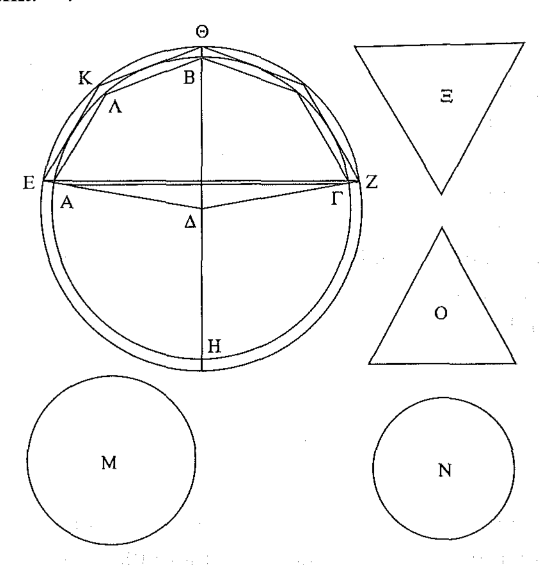
Sea de nuevo una esfera y en ella un círculo máximo y un segmento ABΓ menor que un semicírculo y sea Δ el centro, e inscríbase en el sector ABΓ un polígono[172] de número par de ángulos y circunscríbase uno semejante a él, y sean los lados paralelos a los lados y circunscríbase un círculo al polígono circunscrito y de manera semejante a las proposiciones anteriores, permaneciendo fija HB, produzcan los círculos al hacerlos girar en torno a ella[173] figuras comprendidas por superficies cónicas.

Se ha de demostrar que la superficie de la figura circunscrita guarda con la superficie de la figura inscrita una 152 razón que es el cuadrado de la que guarda el lado del polí-

[172] Como en las proposiciones anteriores, ha de entenderse que el polígono es, además, «equilátero».

[173] Es decir, «en torno a la recta HB».

gono circunscrito con el lado del polígono inscrito, y que la figura más el cono[174] guarda[175] una razón que es el cubo de la misma[176].



Sea el círculo M, el cuadrado de cuyo radio equivale al rectángulo comprendido por un lado del polígono circunscrito y la suma de todas las cuerdas que unen los ángulos más la mitad de EZ.

Entonces el círculo M será igual a la superficie de la figura circunscrita [Prop. 39, corol.]. Tómese también el círculo N, el cuadrado de cuyo radio equivale al rectángulo

---

[174] Se refiere a las construcciones aludidas en la Prop. 38 y el primer corolario de la Prop. 40, es decir, a la figura recién descrita y al cono que tiene por base el casquete ABΓ y el vértice en el centro de la esfera.

[175] Heiberg suple el detalle del texto del siguiente modo: «y que la figura circunscrita más el cono guarda con la figura inscrita más el cono una razón...».

[176] O sea, de la razón del lado del polígono circunscrito al inscrito.

comprendido por un lado del polígono inscrito y la suma de todas las cuerdas que unen los ángulos más la mitad de ΑΓ. Y éste[177] será igual a la superficie de la figura inscrita [Prop. 35]. Y las áreas mencionadas guardan entre sí la misma razón que el cuadrado de lado ΕΚ con el cuadrado de lado ΑΛ[178].

Es evidente, por tanto, que la superficie de la figura circunscrita guarda con la superficie de la figura inscrita una razón que es el cuadrado de la que guarda ΕΚ con ΑΛ[179].

Sea, de nuevo, un cono Ξ que tenga su base igual al cír- 154
culo Μ, y por altura el radio de la esfera menor. Este cono es igual a la figura circunscrita más el cono cuya base es el círculo de diámetro ΕΖ y su vértice Δ [Prop. 40, corol. 1]. Y sea otro cono Ο que tenga su base igual al círculo Ν y por altura la perpendicular trazada desde Δ hasta ΑΛ. También éste será igual a la figura inscrita más el cono cuya base es el círculo de diámetro ΑΓ y su vértice el centro Δ [Prop. 38]. Todo esto ya se ha escrito antes.

Y ΕΚ es al radio de la esfera menor como ΑΛ a la perpendicular trazada desde el centro[180] hasta ΑΛ, y se había demostrado que ΕΚ es a ΑΛ como el radio del círculo Μ al radio del círculo Ν[181]; entonces el diámetro del círculo que es la base de Ξ será al diámetro del círculo que es la base de Ο como la altura del cono Ξ es a la altura del cono Ο[182]. Luego el cono Ξ guarda con el cono Ο una razón que es el cubo de la del diámetro al diámetro [Lema 5 (74, 9); *Elem.* XII 2].

[177] Es decir, el círculo Ν.

[178] [*Y entonces el círculo* Μ *es al círculo* Ν *como el polígono es al polígono*].

[179] [*La misma que guarda el polígono*].

[180] [*El punto Δ*].

[181] [*Y el diámetro al diámetro*].

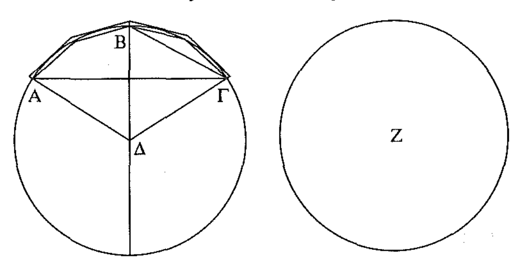
[182] [*Luego los conos son semejantes*].

Está claro, por tanto, que también la figura circunscrita más el cono guarda con la figura inscrita más el cono una razón que es el cubo de la de EK a AA.

156 PROPOSICIÓN 42

La superficie de todo casquete de esfera menor que un hemisferio es igual al círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete hasta la circunferencia del círculo que es la base del casquete de esfera.

Sea una esfera y en ella el círculo máximo ABΓ y un casquete en ella menor que un hemisferio, cuya base sea el círculo de diámetro AΓ que es perpendicular al círculo ABΓ, y tómese el círculo Z cuyo radio es igual a AB.



Se ha de demostrar que la superficie del casquete ABΓ es igual al círculo Z.

Pues si no, sea mayor la superficie del círculo Z, y tómese el centro Δ y una vez trazadas rectas que unan Δ con A, Γ, prolónguense. Y habiendo dos magnitudes desiguales, la superficie del casquete y la del círculo Z, inscríbase en el sector ABΓ un polígono equilátero y de número par de ángulos y circunscríbase otro semejante a éste, de manera que el

circunscrito guarde con el inscrito una razón menor que la que guarda la superficie del casquete de esfera con el círculo z [Prop. 6], y una vez hecho girar el círculo, como antes, habrá dos figuras comprendidas por superficies cónicas, una de ellas circunscrita y la otra inscrita; y la superficie de la figura circunscrita será a la de la figura inscrita como el polígono circunscrito al inscrito. Pues cada una de esas razones es el cuadrado de la que guarda el lado del polígono cir- 158
cunscrito con el lado del inscrito. Pero el polígono circunscrito guarda con el inscrito una razón menor que la que guarda la superficie del casquete mencionado con el círculo z [por hipót.], y la superficie de la figura circunscrita es mayor que la superficie del casquete [Prop. 39]. Luego también la superficie de la figura inscrita es mayor que el círculo z. Lo cual es imposible. Pues se ha demostrado que la superficie mencionada de la figura es menor que un círculo tal [Prop. 37].

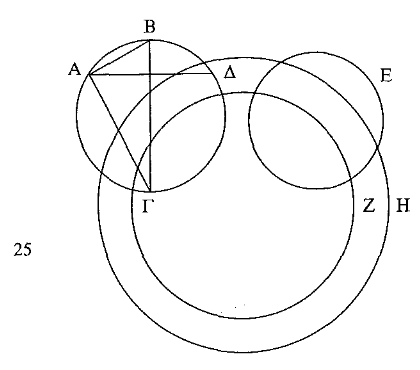
Sea ahora mayor el círculo que la superficie y circunscríbanse e inscríbanse polígonos semejantes y guarde el circunscrito con el inscrito una razón menor que la que guarda el círculo con la superficie del casquete [Prop. 6] [183].

[183] Para Heiberg es poco creíble que Arquímedes dejara sin redactar la segunda parte de la demostración, y la restituye en el sentido siguiente: Por hipótesis, el lado del polígono circunscrito guarda con el del inscrito una razón menor que el círculo z con la superficie del casquete; pero el lado del polígono circunscrito es al del inscrito como la superficie del polígono circunscrito es a la del inscrito; luego la superficie del polígono circunscrito guarda con la del inscrito una razón menor que el círculo z con la superficie del casquete; y, tomando la proporción en alternancia, la superficie del polígono circunscrito guarda con la superficie del casquete una razón menor que la del polígono inscrito con el círculo z; lo cual es imposible, puesto que el área del polígono inscrito es menor que la del casquete [Prop. 36], pero el polígono circunscrito es mayor que el círculo z [Prop. 40].

Entonces la superficie no es menor que el círculo Z. Y se había demostrado que tampoco era mayor. Luego es igual.

PROPOSICIÓN 43

Y si un casquete es mayor que un hemisferio, de manera semejante su superficie es igual a un círculo cuyo radio sea igual a la recta trazada desde el vértice hasta la circunferencia del círculo que es la base del casquete.



Sea una esfera y en ella un círculo máximo, y considéresela cortada mediante un plano perpendicular[184], el correspondiente a AΔ, y sea ABΔ menor que un hemisferio, y sea el diámetro BΓ perpendicular a AΔ, y trácense las rectas BA, AΓ que unan los puntos B, Γ con
160 A; y sean el círculo E, cuyo radio es igual a AB; el círculo Z, cuyo radio es igual a AΓ; y el círculo H cuyo radio es igual a BΓ.

Entonces, el círculo H es igual a la suma de los círculos E, Z[185]. Y, por otro lado, el círculo H es igual a la superficie entera de la esfera[186] [*Elem.* XII 2; prop. 33], mientras que

[184] Entiéndase «perpendicular al círculo máximo mencionado».

[185] Ya que los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros *(Elem.* XII 2) y en aplicación del teorema de Pitágoras *(Elem.* I 47).

[186] [*Puesto que cada esfera es el cuádruple del círculo de diámetro BΓ*].

el círculo E es igual a la superficie del casquete ABΔ [Prop. 42][187].

Luego el círculo restante Z es igual a la superficie del casquete AΓΔ, que es mayor que un hemisferio.

Proposición 44

Todo sector de esfera es igual a un cono que tenga la base igual a la superficie del casquete de esfera correspondiente al sector y la altura igual al radio de la esfera.

Sea una esfera y en ella el círculo máximo ABΔ y el centro Γ; y un cono que tenga por base un círculo igual a la superficie correspondiente a la circunferencia ABΔ[188] y la altura iual a BΓ.

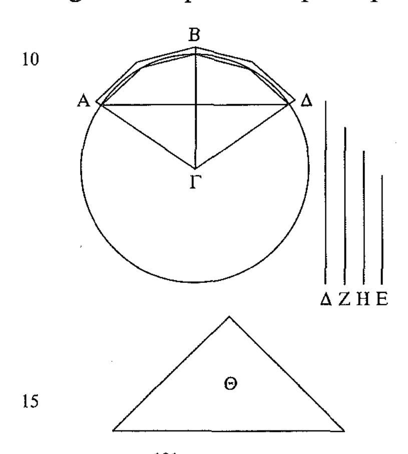
Se ha de demostrar que el sector ABΓΔ es igual al cono indicado.

Pues si no, sea mayor el sector que el cono, y póngase el cono Θ como se ha dicho. Habiendo dos magnitudes desiguales —el sector y el cono Θ— hállense dos líneas, Δ, E —Δ mayor que E—, y guarde Δ con E una razón menor que el sector con el cono [Prop. 2], y tómense dos líneas, Z, H de 162
manera que Δ exceda a Z en lo mismo que Z a H y que H a E; y en torno al sector plano del círculo circunscríbase un polígono equilátero y de número par de ángulos, e inscríbase uno semejante a él, de manera que el lado del circunscrito guarde con el del inscrito una razón menor que la que guar-

[187] [*Pues eso se ha demostrado para el caso del casquete menor que un hemisferio* (Prop. 42)].

[188] Entiéndase: «un círculo igual a la superficie del casquete esférico correspondiente a la circunferencia ABΔ».

da Δ con Z [Prop. 4] y, de modo semejante a las proposiciones anteriores, una vez hecho girar el círculo, resulten dos figuras comprendidas por superficies cónicas.



La figura circunscrita más el cono que tiene por vértice el punto Γ guarda con la suma de la figura inscrita más el cono una razón que es el cubo de la que guarda el lado del polígono circunscrito con el lado del inscrito [Prop. 41]. Pero el lado del circunscrito guarda[189] una razón menor que la de Δ con Z. Luego la mencionada figura sólida[190] guardará[191] una razón menor que el cubo de la de Δ con Z. Pero Δ guarda con E una razón mayor que el cubo de la de Δ con Z. Luego la figura sólida circunscrita al sector guarda con la figura inscrita una razón menor que la que guarda Δ con E. Y Δ guarda con E una razón menor que el sector sólido con el cono Θ [por hipót.]; luego el sector sólido guarda con el cono Θ una razón mayor que la figura circunscrita al sector con la inscrita. Y lo mismo tomando la proporción en
164 alternancia [*Elem.* V 16]. Pero la figura sólida circunscrita es mayor que el casquete. Luego también la figura inscrita en el sector es mayor que el cono Θ. Lo cual es imposible. Pues se ha demostrado en las proposiciones de atrás [Prop.

[189] Se entiende: «guarda con el del inscrito».

[190] Es decir, «la figura circunscrita más el cono».

[191] Súplase «con la figura inscrita más el cono».

38, corol.] que era menor que un cono de tales característi- 3
cas[192].

Luego el sector sólido no es mayor que el cono Θ. 11

Sea ahora el cono Θ mayor que el sector sólido.

De nuevo, igualmente, siendo Δ mayor que E, guarde 15
con ella una razón menor que la que guarda el cono con el sector [Prop. 2] y tómense de modo semejante Z, H, de modo que las diferencias sean las mismas[193], y el lado del polígono[194] de número par de ángulos circunscrito al sector plano guarde con el del inscrito una razón menor que la que 20
guarda Δ con Z [Prop. 4][195].

Demostraremos de la misma manera que la figura sólida circunscrita al sector guarda con la inscrita una razón menor que la que guarda Δ con E y menor que la que guarda el cono Θ con el sector[196]. Y el sector es mayor que la figura ins- 166 25
crita en él; luego el cono Θ es mayor que la figura circunscrita; lo cual es imposible [Prop. 40, corol. 2][197].

Luego el sector es igual al cono Θ. 6

---

[192] [*Esto es, el que tiene por base un círculo cuyo radio sea igual a la recta trazada desde el vértice del casquete hasta la circunferencia del círculo que es la base del casquete, y por altura el radio de la esfera. Este es el referido cono Θ. Pues tiene por base un círculo igual a la superficie del casquete —es decir, al círculo indicado— y una altura igual al radio de la esfera*].

[193] Al igual que en la primera parte de la demostración, hay que entender: «de modo que las diferencias sean las mismas entre cada par de rectas».

[194] Súplase «equilátero y».

[195] [*Y genérense las figuras sólidas en torno al sector sólido*].

[196] [*De manera que también el sector guarda con el cono una razón menor que la que guarda el sólido inscrito en el casquete con el circunscrito*].

[197] [*Pues ya se ha demostrado que un cono de tal tamaño es menor que la figura circunscrita al sector*].

LIBRO II I 168

Arquímedes a Dosíteo, ¡salud!

Hace un tiempo me pediste que redactara las demostraciones de los problemas cuyos enunciados yo mismo envié a Conón. Ocurre que la mayor parte de ellas se redactan por medio de los teoremas cuyas demostraciones te mandé antes: que la superficie de la esfera entera es el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera y que la superficie de todo casquete esférico es igual a un círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete hasta la circunferencia de la base y que en toda esfera el cilindro que tiene por base el círculo máximo de los de la esfera y la altura igual al diámetro de la esfera es él mismo, en magnitud, una vez y media la esfera, y su superficie es una vez y media la superficie de la esfera, y que todo sector sólido es igual al cono que tiene por base un círculo igual a la superficie del casquete de esfera del sector y la altura igual al radio de la esfera.

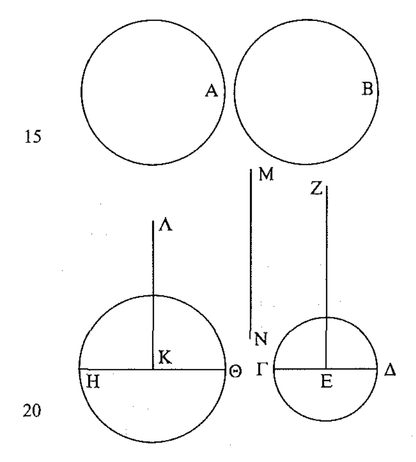
Cuantos teoremas y problemas se redactan por medio de estos teoremas te los envío tras redactarlos en este libro y cuantos se resuelven por medio de otras reflexiones, los relativos a 170
las espirales y a los conoides procuraré enviártelos pronto.

El primero de los problemas era éste:

Dada una esfera, hallar un área plana igual a la superficie de la esfera. Es evidente que éste queda demostrado a partir de los teoremas que mencioné antes, pues el cuádruple del círculo máximo de los de la esfera es un área plana y es igual a la superficie de la esfera.

Proposición 1

La segunda era: *Dado un cono o un cilindro hallar la esfera igual al cono o al cilindro.*



Sea A el cono o el cilindro dado y la esfera B igual a A, y póngase el cilindro ΓZΔ que sea una vez y media el cono o el cilindro A, y un cilindro igual a una vez y media la esfera B, cuya base sea el círculo de diámetro HΘ y su eje KΛ igual al diámetro de la esfera B [I 34, corol.].

Entonces el cilindro E es igual al cilindro K[1]. Luego el círculo E es al círculo K —esto es, el cuadrado de lado ΓΔ es al cuadrado de lado HΘ [*Elem.* XII 2]— como KΛ es a EZ [*Elem.* XII 15]. Y KΛ es igual a HΘ[2]. Luego el cuadrado

[1] [*En los cilindros iguales las bases son inversamente proporcionales a las alturas*].

[2] [*El cilindro que es una vez y media la esfera tiene el eje igual al diámetro de la esfera y el círculo* K *es uno máximo de los de la esfera*].

de lado ΓΔ es al cuadrado de lado ΗΘ como ΗΘ es a EZ. Sea el cuadrado de lado ΗΘ igual al rectángulo comprendido por ΓΔ, MN. Entonces ΓΔ es a MN como el cuadrado de lado ΓΔ es al cuadrado de lado ΗΘ, esto es, como ΗΘ es a EZ y, tomando 172
la proporción en alternancia, ΓΔ es a ΗΘ como ΗΘ es a MN y como MN a EZ[3]. Y cada una de las rectas ΓΔ, EZ ha sido dada; luego dadas dos rectas ΓΔ, EZ, las rectas ΗΘ, MN son dos medias proporcionales. Luego cada una de las rectas ΗΘ, MN ha sido dada.

La síntesis del problema se planteará así: *Sea A el cono o el cilindro dado. Es preciso hallar una esfera igual al cono o al cilindro A.*

Sea un cilindro que sea una vez y media el cono o el cilindro A, cuya base[4] sea el círculo de diámetro ΓΔ y su eje EZ, y tómense ΗΘ, MN que sean medias proporcionales de ΓΔ, EZ, de manera que ΓΔ sea a ΗΘ como ΗΘ a MN y como MN a EZ[5], y considérese un cilindro cuya base sea el círculo de diámetro ΗΘ y su eje ΚΛ igual al diámetro ΗΘ.

Digo que el cilindro E es igual al cilindro K.

Y puesto que ΓΔ es a ΗΘ como MN a EZ y ⟨lo mismo⟩ tomando la proporción en alternancia y ΗΘ es igual a ΚΛ[6], en-

---

[3] El detalle de las proporciones es correcto, pero la imprecisión de la literalidad del texto es evidente. Ni Heiberg, sin embargo, se atreve a proponer correcciones, sino que se limita a aclarar el sentido del razonamiento del modo que sigue: ΓΔ : MN :: ΗΘ : EZ; y tomando la proporción en alternancia ΓΔ : ΗΘ :: MN: EZ; y por hipótesis, ΓΔ : ΗΘ :: ΗΘ : MN; de lo que se sigue, en efecto que ΓΔ : ΗΘ :: ΗΘ : MN :: MN : EZ.

[4] Es decir, la base del primer cilindro, el que es igual a una vez y media el cono o el cilindro A.

[5] Véase el *Comentario* de EUTOCIO a este pasaje, págs. 359 y ss.

[6] [*Luego ΓΔ es a MN —es decir, el cuadrado de ΓΔ es al cuadrado de ΗΘ— como el círculo E es al círculo K*].

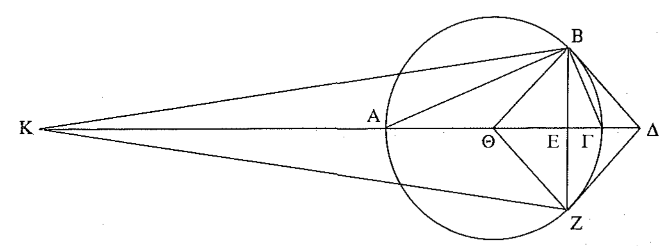
tonces el círculo E es al círculo K como KΛ es a EZ[7]. Luego el cilindro E es igual al cilindro K. Y el cilindro K es una vez y media la esfera cuyo diámetro es HΘ.

174 Luego la esfera cuyo diámetro es igual a HΘ —es decir, B— es igual al cono o al cilindro A.

Proposición 2

Todo casquete esférico es igual a un cono que tenga por base la misma que el casquete y por altura una recta que guarde con la altura del casquete la misma razón que guarda la suma del radio de la esfera más la altura del casquete restante con la altura del casquete restante.

Sea una esfera en la cual haya un círculo máximo cuyo diámetro sea AΓ, y córtese la esfera mediante un plano que



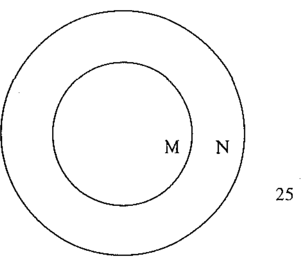
pase por BZ perpendicular a AΓ, y sea Θ el centro; y hágase de manera que la suma de ΘA, AE sea a AE como ΔE a ΓE; y de nuevo hágase de manera que proporcionalmente la suma de ΘΓ, ΓE sea a ΓE como KE a EA; y sobre el círculo de diá-

[7] [*Luego en los cilindros E, K las bases son inversamente proporcionales a las alturas*]. Heiberg aclara que ΓΔ : MN = HΘ : EZ = KΛ : EZ; pero ΓΔ : MN = $ΓΔ^2$: $HΘ^2$ = E : K, luego también E : K = KΛ : EZ.

metro BZ constrúyanse conos que tengan por vértices los puntos K, Δ.

Digo que el cono BΔZ es igual al casquete esférico correspondiente a Γ y el cono BKZ igual al casquete correspondiente al punto A.

Trácense BΘ, ΘZ y considérese un cono que tenga por base el círculo de diámetro BZ y por vértice el punto Θ; y sea un cono M que tenga por base un círculo igual a la superficie del casquete BΓZ de la esfera —esto es, ⟨un círculo⟩ cuyo radio sea igual a BΓ y su altura sea igual al radio de la esfera—. El cono M será igual al sector sólido BΓΘZ —pues esto ya se ha demostrado en el Libro 176
primero [I 44]— y puesto que ΔE es a EΓ como la suma de ΘA, AE es a AE, por descomposición [*Elem.* V 17] ΓΔ será a ΓE como ΘA a AE, es decir, como ΓΘ a AE; y, tomando la proporción en alternancia [*Elem.* V 16], ΔΓ es a ΓΘ como ΓE a EA y, por composición [*Elem.* *V* 18], ΘΔ es a ΘΓ como ΓA a AE, es decir, como el cuadrado de lado ΓB es al cuadrado de lado BE. Luego ΔΘ es a ΓΘ como el cuadrado de lado ΓB es al cuadrado de lado BE. Y ΓB es igual al radio del círculo M [I 42], y BE es el radio del círculo de diámetro BZ. Luego ΔΘ es a ΘΓ como el círculo M es al círculo de diámetro BZ. Y ΘΓ es igual al eje del cono M. Luego ΔΘ es al eje del cono M como el círculo M es al círculo de diámetro BZ; entonces el cono que tiene por base el círculo M y por altura el radio de la esfera es igual al rombo sólido BΔZΘ[8]. Pero el cono M es igual al 26



[8] [*Esto se ha demostrado en los lemas del Libro I. O así: Puesto que ΔΘ es a la altura del cono M como el círculo M es al círculo de diámetro BZ, entonces el cono M es igual al cono cuya base es el círculo de diámetro BZ y su altura ΔΘ, pues en ellos las bases son inversamente propor-*

sector sólido ΒΓΖΘ; y el sector sólido ΒΓΖΘ es, por tanto,
178 igual al rombo sólido ΒΔΖΘ. Si se resta de ambos el cono cuya base es el círculo de diámetro ΒΖ y la altura ΕΘ, entonces el cono restante ΒΔΖ es igual al casquete esférico ΒΖΓ.

De la misma manera se demostrará también que el cono ΒΚΖ es igual al casquete esférico ΒΑΖ. Y puesto que la suma de ΘΓΕ es a ΓΕ como ΚΕ es a ΕΑ, entonces, por descomposición, ΚΑ es a ΑΕ como ΘΓ es a ΓΕ, y ΘΓ es igual a ΘΑ. Y, tomando la proporción en alternancia, ΚΑ es a ΑΘ como ΑΕ a ΕΓ; de modo que, por composición, ΚΘ es a ΘΑ como ΑΓ es a ΓΕ —es decir, como el cuadrado de lado ΒΑ es al cuadrado de lado ΒΕ—. Póngase de nuevo un círculo Ν cuyo radio sea igual a ΑΒ. Entonces es igual a la superficie del casquete ΒΑΖ. Y considérese el cono Ν que tenga su altura igual al radio de la esfera[9]; entonces es igual al sector sólido ΒΘΖΑ —esto ya se ha demostrado en el Libro primero—. Y puesto que se demostró que ΚΘ es a ΘΑ como el cuadrado de lado ΑΒ al cuadrado de lado ΒΕ —es decir, como el cuadrado del radio del círculo Ν al cuadrado del radio del círculo de diámetro ΒΖ; es decir, el círculo Ν al círculo de diámetro ΒΖ— y, por otro lado, ΑΘ es igual a la altura del cono Ν, entonces ΚΘ es a la altura del cono Ν como el círculo Ν es al círculo de diámetro ΒΖ. Entonces, el cono Ν —es decir, el sector ΒΘΖΑ— es igual a la figura ΒΘΖΚ. Añádase a ambos el cono cuya base es el círculo de diámetro ΒΖ y su altura ΕΘ; entonces, el casquete esférico ΑΒΖ entero es igual al cono ΒΖΚ.

Que es lo que había que demostrar.

---

cionales a las alturas. Pero el cono que tiene por base el círculo de diámetro ΒΖ *y por altura* ΔΘ *es igual al rombo sólido* ΒΔΖΘ].

[9] Se sobreentiende que tiene por base el círculo Ν.

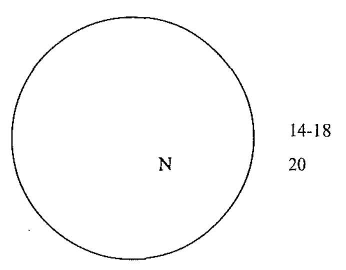
COROLARIO 180

Y es evidente que, en general, un casquete esférico es al cono que tiene la misma base que el casquete y la misma altura como la suma del radio de la esfera más la perpendicular ⟨al plano⟩ del casquete restante es al ⟨plano del⟩ casquete restante, pues ΔE es a EΓ como el cono ΔZB —es decir, el casquete BΓZ [Prop. 2]— es al cono BΓZ.

* * *

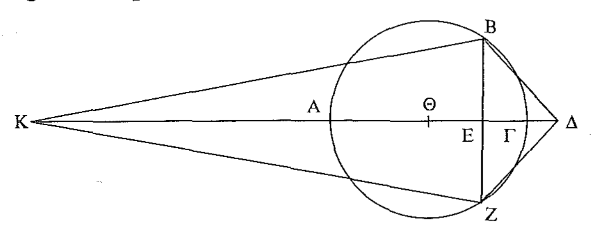
Supuesto el mismo caso, ⟨digo⟩ también que el cono KBZ es igual al casquete esférico BAZ.

Sea el cono N que tenga la base igual a la superficie de la esfera y por altura el radio de la esfera; entonces el cono es igual a la esfera[10]. Y puesto que la suma de ΘA, AE es a AE como ΔE a EΓ, descomponiendo la proporción y tomándola en alternancia ΘΓ es a ΓΔ como AE a EΓ. De nuevo, puesto que KE es a EA como la suma de ΘΓE a ΓE, descomponiendo la proporción y tomándola en alternancia KA es a ΓΘ —esto es, a ΘA— como AE a EΓ —esto es, como ΘΓ a ΓΔ—. Y lo mismo por composición. Y AΘ es igual a ΘΓ. Luego KΘ es a ΘΓ como ΘΔ a ΔΓ, y la recta entera KΔ es a ΔΘ como ΔΘ a ΔΓ —esto es, como KΘ a ΘA—. 182



[10] [*Pues se ha demostrado que la esfera es el cuádruple del cono que tiene por base el círculo máximo y por altura el radio. Y, en efecto, el cono* N *es el cuádruple del mismo, puesto que también la base ⟨es el cuádruple⟩ de la base y la superficie de la esfera ⟨es el cuádruple⟩ de ⟨un círculo máximo de⟩ los que hay en ella*].

Luego el rectángulo comprendido por ΔK, ΘA es igual al comprendido por ΔΘK. A la vez, puesto que KΘ es a ΘΓ como ΘΔ a ΓΔ, ⟨tómese⟩ la proporción en alternancia; y se había demostrado que ΘΓ es a ΓΔ como AE a EΓ. Luego KΘ es a ΘΔ como AE a EΓ. Y entonces el cuadrado de lado KΔ es al rectángulo comprendido por KΘΔ como el cuadrado de lado



AΓ es al rectángulo comprendido por AEΓ. Y se había demostrado que el rectángulo comprendido por KΘΔ era igual al comprendido por KΔ, AΘ. Luego el cuadrado de lado KΔ es al rectángulo comprendido por KΔ, AΘ —es decir, KΔ es a AΘ— como el cuadrado de lado AΓ es al rectángulo comprendido por AEΓ —es decir, al cuadrado de lado EB—. Y AΓ es igual al radio del círculo N. Luego el cuadrado que tiene por lado el radio del círculo N es al cuadrado de lado BE —es decir, el círculo N es al círculo de diámetro BZ— como KΔ es a AΘ —es decir, como KΔ es a la altura del cono
19 N. Luego el cono N —es decir, la esfera— es igual al rombo
27 sólido BΔZK[11]. De los cuales conos[12] el BΔZ se había demostrado que era igual al casquete esférico BΓZ.

[11] [*O de este modo: Luego el círculo* N *es al círculo de diámetro* BZ *como* ΔK *es a la altura del cono* N*; luego el cono* N *es igual al cono cuya base es el círculo de diámetro* BZ *y su altura* ΔK*, ya que sus bases son inversamente proporcionales a sus alturas. Pero este cono es igual al rombo sólido* BΔZK*; entonces el cono* N *—es decir, la esfera— también es igual al rombo sólido* BΔZK].

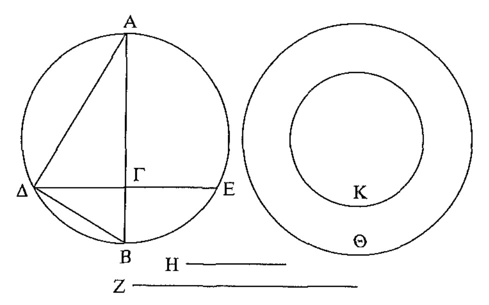
[12] Se refiere a los conos que forman el rombo sólido.

Luego el cono restante BKZ es igual al casquete esférico BAZ.

PROPOSICIÓN 3 184

El tercer problema era éste: cortar mediante un plano la esfera dada de manera que las superficies de los casquetes guarden entre sí una razón igual a la razón dada.

Dése por hecho y sea AΔBE un círculo máximo de la esfera y AB su diámetro y constrúyase un plano perpendicular a AB y produzca el plano en el círculo AΔBE una sección ΔE y trácense AΔ, BΔ.



Puesto que existe una razón entre la superficie del casquete ΔAE y la superficie del casquete ΔBE, y la superficie del casquete ΔAE es igual a un círculo cuyo radio es igual a AΔ [Prop. I 43], mientras que la superficie del casquete ΔBE es igual a un círculo cuyo radio es igual a ΔB [Prop. I 42], y los círculos mencionados guardan entre sí la razón del cuadrado de lado AΔ al cuadrado de lado ΔB [*Elem.* XII 2] —es decir, la de AΓ a ΓB—, entonces la razón de AΓ a ΓB ha sido dada, de modo que también el punto Γ ha sido dado. Y ΔE es

perpendicular a ΑΒ. Luego también nos ha sido dado en posición el plano que pasa por ⟨la sección⟩ ΔΕ.

Luego la síntesis se planteará así:

Sea una esfera de la cual sea ΑΒΔΕ un círculo máximo y ΑΒ un diámetro y sea la razón dada la de Ζ a Η, y córtese ΑΒ por el punto Γ de modo que ΑΓ sea a ΒΓ como Ζ a Η [*Elem.* VI 2]; y córtese la esfera por el punto Γ mediante un plano perpendicular a la recta ΑΒ, y sea ΔΕ la sección común, y
186 trácense ΑΔ, ΔΒ y constrúyanse dos círculos Θ, Κ —el Θ con radio igual a ΑΔ y el Κ con radio igual a ΔΒ—.

Entonces el círculo Θ es igual a la superficie del casquete ΔΑΕ [Prop. I 43] y el Κ igual al casquete ΔΒΕ [Prop. I 42] —esto se demostró antes en el Libro I—. Y puesto que el ángulo ΑΔΒ es recto [*Elem.* III 31] y ΓΔ es un cateto, entonces ΑΓ es a ΓΒ —esto es, Ζ es a Η— como el cuadrado de lado ΑΔ es al cuadrado de lado ΔΒ; esto es, como el cuadrado que tiene por lado el radio del círculo Θ es al cuadrado que tiene por lado el radio del círculo Κ; esto es, como el círculo Θ es al círculo Κ [*Elem.* XII 2]; esto es, como la superficie del casquete ΔΑΕ es a la superficie del casquete esférico ΔΒΕ.

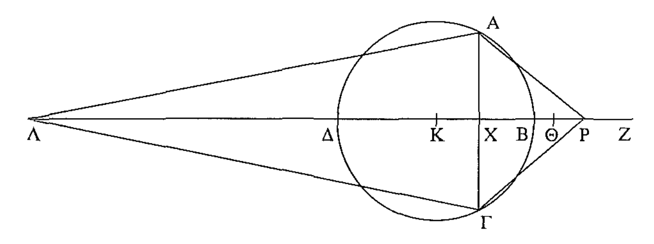
Proposición 4

Cortar una esfera dada de manera que los casquetes de la esfera guarden entre sí una razón igual a la razón dada.

Sea ΑΒΓΔ la esfera dada. Hay que cortarla mediante un plano de manera que los casquetes de la esfera guarden entre sí la razón dada.

Córtese mediante un plano que pase por ΑΓ. Entonces la razón entre el casquete esférico ΑΔΓ y el casquete esférico

ΑΒΓ ha sido dada. Córtese la esfera por el centro[13] y sea la sección el círculo máximo ΑΒΓΔ, y el centro K, y su diámetro ΔΒ, y hágase de manera que la suma de ΚΔΧ sea a ΔΧ como ΡΧ es a ΧΒ, y que la suma de ΚΒΧ sea a ΒΧ como ΛΧ es



a ΧΔ, y trácense ΑΛ, ΛΓ, ΑΡ, ΡΓ. Entonces el cono ΑΛΓ es igual al casquete esférico ΑΔΓ y el ⟨cono⟩ ΑΡΓ al ⟨casquete⟩ 188
ΑΒΓ [Prop. 2]; luego también la razón del cono ΑΛΓ al cono ΑΡΓ ha sido dada. Y el cono es al cono como ΛΧ es a ΧΡ[14]. Luego también la razón de ΛΧ a ΧΡ ha sido dada. Y, por el mismo razonamiento que en las proposiciones anteriores, por construcción, ΛΔ es a ΚΔ como ΚΒ a ΒΡ y ΔΧ a ΧΒ. Y puesto que ΡΒ es a ΒΚ como ΚΔ a ΛΔ [*Elem.* V 7, corol.], por composición [*Elem.* V 18] ΡΚ es a ΚΒ —esto es, a ΚΔ— como ΚΛ es a ΛΔ. Y por consiguiente el segmento entero ΡΛ es al segmento entero ΚΛ como ΚΛ es a ΛΔ [*Elem.* V 12]. Luego el rectángulo comprendido por ΡΛΔ es igual al cuadrado de lado ΛΚ [*Elem.* VI 17]. Luego ΡΛ es a ΛΔ como el cuadrado de lado ΚΛ es al cuadrado de lado ΛΔ. Y puesto que ΛΔ es a ΔΚ como ΔΧ es a ΧΒ, por inversión [*Elem.* V 7, corol.] y composición [*Elem.* V 18], ΚΛ es a ΛΔ como ΒΔ es a

[13] La sección ha de ser mediante un plano perpendicular al plano que pasa por ΑΓ.

[14] [*Puesto que tienen la misma base, el círculo de diámetro ΑΓ*].

ΔΧ[15]. Y póngase ΒΖ igual a ΚΒ; es evidente que será exterior a Ρ[16]. Puesto que la razón de ΔΛ a ΛΧ ha sido dada, entonces también ha sido dada la razón de ΡΛ a ΛΧ. Y puesto que la razón de ΡΛ a ΛΧ está compuesta de la razón que guarda ΡΛ con ΛΔ y la de ΔΛ con ΛΧ, mientras que por un lado ΡΛ es a ΛΔ como el cuadrado de lado ΔΒ es al cuadrado de lado ΔΧ y, por otro lado, ΔΛ es a ΛΧ como ΒΖ es a ΖΧ, entonces la razón de ΡΛ a ΛΧ está compuesta de la razón que guarda el cuadrado de lado ΒΔ con el cuadrado de lado ΔΧ y de la que guarda ΒΖ con ΖΧ.

Hágase que ΒΖ sea a ΖΘ como ΡΛ a ΛΧ; y la razón de ΡΛ a ΛΧ ha sido dada. Luego la razón de ΖΒ a ΖΘ también ha sido dada; y ΒΖ ha sido dada, pues es igual al radio; luego también ΖΘ ha sido dada [Euc., *Data* 2]. Y entonces la razón de ΒΖ a ΖΘ está compuesta de la razón que guardan el cuadrado de lado ΒΔ con el cuadrado de lado ΔΧ y la de ΒΖ a ΖΧ. Pero la razón de ΒΖ a ΖΘ está compuesta de las razones de ΒΖ a ΖΧ y la de ΖΧ a ΖΘ[17]. Por tanto, lo que queda es que el cuadrado de lado ΒΔ —es decir, una magnitud dada— es al cuadrado de lado ΔΧ como ΧΖ es a ΖΘ —esto es, a una magnitud dada—. Y la recta ΖΔ ha sido dada; luego se ha de cortar la recta dada ΔΖ por el punto Χ y hacer que ΧΖ sea a la recta dada[18] como la magnitud dada[19] es al cuadrado de lado ΔΧ.

[15] *[Y por tanto, el cuadrado de lado ΚΛ es al cuadrado de lado ΛΔ como el cuadrado de lado ΒΔ es al cuadrado de lado ΔΧ. De nuevo, puesto que ΛΧ es a ΔΧ como la suma de ΚΒ, ΒΧ es a ΒΧ, por descomposición ΛΔ es a ΔΧ como ΔΧ es a ΒΧ]*.

[16] *[Y ΛΔ será a ΔΧ como ΖΒ a ΒΧ; de manera que también ΔΛ será a ΛΧ como ΒΖ a ΖΧ]*.

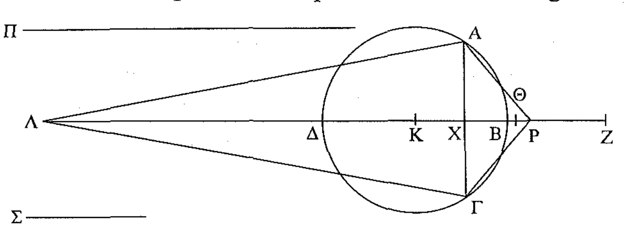
[17] *[Quítese de ambas la razón de ΒΖ a ΖΧ].*

[18] *[La ΖΘ].*

[19] *[El cuadrado de lado ΒΔ].*

Enunciado de modo absoluto requiere diorismo, pero si se añaden las condiciones que tenemos aquí[20], no requiere diorismo. Y el problema será el siguiente: Dadas dos rectas 192
ΒΔ, ΒΖ y siendo doble ΒΔ que ΒΖ y dado un punto Θ en la recta ΒΖ, cortar ΔΒ por el punto Χ y hacer que el cuadrado de lado ΒΔ sea al cuadrado de lado ΔΧ como ΧΖ es a ΖΘ. De cada una de estas cuestiones se darán al final el análisis y la síntesis[21].

La síntesis del problema se planteará del modo siguiente:



Sea la razón dada la de Π a Σ, la del mayor al menor, y dése una esfera y córtese mediante un plano que pase por el centro y sea la sección el círculo ΑΒΓΔ y sea ΒΔ el diámetro y Κ el centro y póngase ΒΖ igual a ΚΒ, y córtese ΒΖ por el punto Θ de modo que ΘΖ sea a ΘΒ como Π es a Σ, y córtese también ΒΔ por el punto Χ de modo que ΧΖ sea a ΘΖ como el cuadrado de lado ΒΔ es al cuadrado de lado ΔΧ y constrúyase por el punto Χ un plano perpendicular a ΒΔ.

[20] [*Es decir, que* ΔΒ *sea el doble de* ΒΖ *y que* ΖΒ *sea mayor que* ΖΘ, *de acuerdo con el análisis*].

[21] La aclaración prometida —que ya se había perdido en tiempos de Diocles y Dionisodoro— falta en todos los mss., pero Eutocio la incluye en su *Comentario* transcribiéndola a partir de un manuscrito antiguo y estropeado hallado por él mismo; ofrecemos la traducción de ese pasaje en págs. 391 y ss. Según Heiberg, Hugenius dio otra resolución del problema en *Opera mechanica cet.*, Leiden, 1751, vol. II, págs. 388-391.

Digo que este plano cortará a la esfera de modo que el casquete mayor sea al menor como Π es a Σ.

Hágase de modo que la suma de ΚΒΧ sea a ΒΧ como ΛΧ es a ΔΧ, y que la suma de ΚΔΧ sea a ΧΔ como ΡΧ a ΧΒ, y trácense las rectas ΑΛ, ΛΓ, ΑΡ, ΡΓ.

Por construcción, como demostramos en el análisis, el rectángulo comprendido por ΡΛΔ será igual al cuadrado de lado ΛΚ, y ΚΛ será a ΛΔ como ΒΔ a ΔΧ. De modo que el cuadrado de lado ΚΛ es al cuadrado de lado ΛΔ como el cuadrado de lado ΒΔ es al cuadrado de lado ΔΧ.

Y puesto que el rectángulo comprendido por ΡΛΔ es
194 igual al cuadrado de lado ΛΚ[22], entonces también ΡΛ será a ΛΔ como el cuadrado de lado ΒΔ es al cuadrado de lado ΔΧ, es decir, como ΧΖ a ΖΘ. Y puesto que la suma de ΚΒΧ es a ΒΧ como ΛΧ es a ΧΔ, y que ΚΒ es igual a ΒΖ, entonces también ΖΧ será a ΧΒ como ΛΧ a ΧΔ. Y, por inversión [*Elem.* V 19, corol.], ΧΖ será a ΖΒ como ΧΛ a ΛΔ. De modo que también ΛΔ es a ΛΧ como ΒΖ es a ΖΧ. Y puesto que ΡΛ es a ΛΔ como ΧΖ a ΖΘ mientras que ΔΛ es a ΛΧ como ΒΖ a ΖΧ [*Elem.* V 7, corol.], *ex aequali* y tomando la proporción alterada [*Elem.* V 21], ΡΛ es a ΛΧ como ΒΖ a ΖΘ. Luego ΛΧ es a ΧΡ como ΖΘ a ΘΒ. Y ΖΘ es a ΘΒ como Π es a Σ [por hipót.]; luego también ΛΧ es a ΧΡ —esto es, el cono ΑΓΛ al cono ΑΡΓ; esto es, el casquete esférico ΑΔΓ al casquete esférico ΑΒΓ— como Π es a Σ.

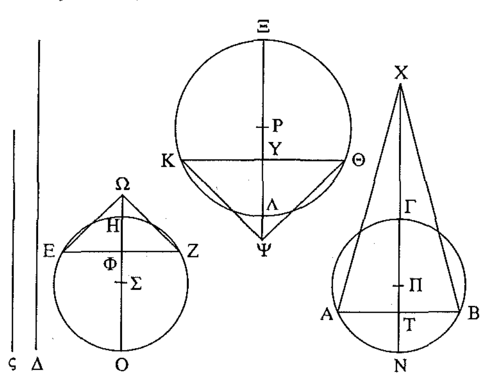
[22] [*ΡΛ es a ΛΔ como el cuadrado de lado ΛΚ es al cuadrado de lado ΛΔ*].

PROPOSICIÓN 5

Construir un casquete de esfera semejante a uno dado e igual a otro también dado[23].

Sean ABΓ, EZH los dos casquetes de esfera dados, y sea la base del casquete ABΓ el círculo de diámetro AB, y su vértice el punto Γ; y la base del casquete EZH el círculo de diámetro EZ, y su vértice el punto H.

Es preciso hallar un casquete esférico que sea igual al casquete ABΓ y semejante al EZH.



Hállese y sea ΘKΛ, y sea su base el círculo de diámetro ΘK y su vértice el punto Λ. En las esferas sean también los círculos[24] 196
ANBΓ, ΘΞKΛ, EOZH, y sean sus diámetros ΓN, ΛΞ, HO, perpendiculares a las bases de los casquetes, y sean Π, P, Σ sus centros, y

[23] Arquímedes había remitido a Conón este enunciado y a Dosíteo la correspondiente demostración, según indica en la carta-dedicatoria de *Espirales*.

[24] Se refiere a «círculos máximos».

hágase de modo que la suma de ΠΝ, ΝΤ sea a ΝΤ como ΧΤ es a ΤΓ; y de modo que la suma de ΡΞ, ΞΥ sea a ΞΥ como ΨΥ es a ΥΛ; y de modo que la suma de ΣΟ, ΟΦ sea a ΟΦ como ΩΦ es a ΦΗ; y considérense unos conos cuyas bases sean los círculos de diámetro ΑΒ, ΘΚ, ΕΖ y sus vértices los puntos Χ, Ψ, Ω.

Entonces el cono ΑΒΧ será igual al casquete esférico ΑΒΓ; el ⟨cono⟩ ΨΘΚ al ⟨casquete⟩ ΘΚΛ y el ⟨cono⟩ ΕΩΖ al ⟨casquete⟩ ΕΗΖ: esto ya se ha demostrado [Prop. 2].

Y puesto que el casquete esférico ΑΒΓ es igual al casquete ΘΚΛ, entonces también el cono ΑΧΒ es igual al cono ΨΘΚ[25]. Por tanto, el círculo de diámetro ΑΒ es al círculo de diámetro ΘΚ como ΨΥ a ΧΤ [*Esf. Cil.* I, lema 4, 74, 6]. Y el círculo es al círculo como el cuadrado de lado ΑΒ es al cuadrado de lado ΘΚ [*Elem.* XII 2]; luego el cuadrado de lado ΑΒ es al cuadrado de lado ΘΚ como ΨΥ es a ΧΤ. Y puesto que el casquete ΕΖΗ es semejante al casquete ΘΚΛ, entonces también el cono ΕΖΩ es semejante al cono ΨΘΚ[26]. Luego ΩΦ es a ΕΖ como ΨΥ es a ΘΚ. Y la razón de ΩΦ a ΕΖ ha sido dada; luego también ha sido dada la de ΨΥ a ΘΚ. Sea la mis-
198 ma la razón de ΧΤ a Δ. Y ΧΤ ha sido dada. Y puesto que ΨΥ es a ΧΤ —esto es, el cuadrado de lado ΑΒ es al cuadrado de lado ΘΚ— como ΘΚ es a Δ, constrúyase el rectángulo comprendido por ΑΒ, ς igual al cuadrado de lado ΘΚ. Y entonces también el cuadrado de lado ΑΒ será al cuadrado de lado ΘΚ como ΑΒ es a ς. Y se había demostrado también que el cuadrado de lado ΑΒ es al cuadrado de lado ΘΚ como ΘΚ es a Δ y, tomando la proporción en alternancia, ΑΒ es a ΘΚ

[25] [*En los conos iguales, las bases son inversamente proporcionales a las alturas*].

[26] [*Esto se demostrará*].

como ς es a Δ. Por otro lado, AB es a ΘK como ΘK es a ς[27]. Entonces AB es a ΘK como ΘK es a ς y como ς es a Δ.

Luego dadas dos magnitudes AB, Δ, las magnitudes ΘK, ς son dos medias proporcionales en proporción continua.

La síntesis del problema se planteará del modo siguiente:

Sea ABΓ el casquete respecto al cual hay que construir un casquete igual, y EZH el casquete respecto al cual hay que construir otro semejante, y sean ABΓN, EHZO círculos máximos de las esferas, y ΓN, HO sus diámetros, y Π, Σ sus centros, y hágase de modo que la suma de ΠN, NT sea a NT como XT a TΓ, y de modo que la suma de ΣOΦ sea a OΦ como ΩΦ a ΦH; entonces el cono XAB es igual al casquete esférico AΓB, y el ⟨cono⟩ ZΩE al ⟨casquete⟩ EHZ. Hágase que ΩΦ sea a EZ como XT a Δ, y dadas las dos rectas AB, Δ, tómense las dos medias proporcionales ΘK, ς, de modo que AB sea a ΘK como KΘ es a ς y como ς es a Δ[28]; y sobre la recta ΘK constrúyase el segmento circular ΘKΛ semejante al segmento de **200** círculo EZH [*Elem.* III 33 y III, def. 11], y complétese el círculo [*Elem.* III 25], y sea su diámetro ΛΞ, y considérese una esfera cuyo círculo máximo sea ΛΘΞK y su centro P, y trácese un plano que pase por ΘK perpendicular a ΛΞ.

El casquete esférico que está hacia el mismo lado que Λ será semejante al casquete esférico EHZ, puesto que también los segmentos de los círculos[29] eran semejantes.

Y digo que también es igual al casquete esférico ABΓ.

Hágase de modo que la suma de PΞ, ΞY sea a ΞY como ΨY a YA.

---

27 [*Por ser igual el cuadrado de lado* ΘK *al rectángulo comprendido por* AB, *ς*].

28 Cf. II 1, 12 y ss. y el *Comentario* de Eutocio, págs. 359 y ss.

29 «Los círculos sobre los que se construyeron ambos casquetes», hay que entender.

Entonces el cono ΨΘΚ es igual al casquete esférico ΘΚΛ [Prop. 2]. Y puesto que el cono ΨΘΚ es semejante al cono ΖΩΕ, entonces ΩΦ es a ΕΖ —esto es, ΧΤ es a Δ [por hipót.]— como ΨΥ es a ΘΚ. Y, tomando la proporción en alternancia [*Elem.* V 16] e invertida [*Elem.* V 7, corol.], ΨΥ es a ΧΤ como ΘΚ es a Δ. Y puesto que ΑΒ, ΚΘ, ς, Δ están en proporción, el cuadrado de lado ΑΒ es al cuadrado de lado ΘΚ como ΘΚ es a Δ; y ΘΚ es a Δ como ΨΥ es a ΧΤ. Y entonces el cuadrado de lado ΑΒ es al cuadrado de lado ΚΘ —esto es, el círculo de diámetro ΑΒ es al círculo de diámetro ΘΚ [*Elem.* XII 2]— como ΨΥ es a ΧΤ. Luego el cono ΧΑΒ es igual al cono ΨΘΚ; de manera que también el casquete esférico ΑΒΓ es igual al casquete esférico ΘΚΛ.

Luego se ha construido el casquete ΘΚΛ igual al casquete dado ΑΓΒ y semejante a otro ⟨casquete⟩ dado ΕΖΗ.

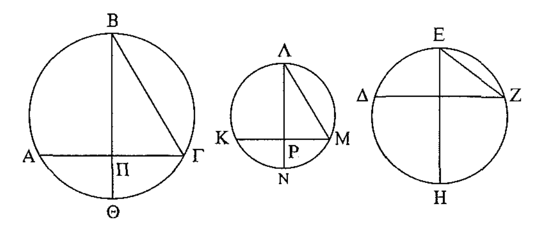
202 Proposición 6

Dados dos casquetes de esfera, sea en la misma esfera o no, hallar un casquete de esfera que sea semejante a uno de los casquetes dados y que tenga la superficie igual a la del otro casquete.

Sean los casquetes esféricos dados los correspondientes a las circunferencias ΑΒΓ, ΔΕΖ y sea el correspondiente a la circunferencia ΑΒΓ aquél al que ha de ser semejante y el correspondiente a ΔΕΖ aquél cuya superficie ha de igualar.

Dese por hecho, y sea ΚΛΜ el casquete esférico semejante al casquete ΑΒΓ y tenga la superficie igual a la superficie del casquete ΔΕΖ, y considérense los centros de las esferas y trácense planos que pasen por ellos, perpendiculares a

las bases de los casquetes; y resulten en las esferas como secciones los círculos máximos ΚΛΜΝ, ΒΑΓΘ, ΕΖΗΔ, y en las bases de los casquetes resulten[30] las rectas ΚΜ, ΑΓ, ΔΖ; y sean ΛΝ, ΒΘ, ΕΗ diámetros de las esferas, perpendiculares a ΚΜ, ΑΓ, ΔΖ, y trácense rectas que unan ΛΜ, ΒΓ, ΕΖ.



Y puesto que la superficie del casquete de esfera ΚΛΜ es igual a la superficie del casquete ΔΕΖ, entonces el círculo cuyo radio es igual a ΛΜ es igual al círculo cuyo radio es igual a ΕΖ[31]; de manera que ΜΛ es igual a ΕΖ [*Elem.* XII 2]. 27
Y puesto que el casquete ΚΛΜ es semejante al ΑΒΓ, ΛΡ es a 204
ΡΝ como ΒΠ es a ΠΘ; y tomando la proporción invertida [*Elem.* V 7, corol.] y por composición [*Elem.* V 18], ΝΛ es a ΛΡ como ΘΒ es a ΒΠ. Pero también ΡΛ es a ΛΜ como ΒΠ a ΓΒ[32]. Luego ΝΛ es a ΛΜ —es decir, a ΕΖ— como ΘΒ a ΒΓ [*Elem.* V 22]; y tómese la proporción en alternancia [*Elem.* V 16]. Y la razón de ΕΖ a ΒΓ ha sido dada, puesto que cada una de esas rectas ha sido dada; luego también ha sido dada la razón de ΛΝ a ΒΘ; y ΒΘ ha sido dada [*Dat.* 1]; luego también ΛΝ ha sido dada [*Dat.* 2]; de modo que también ha sido dada la esfera [*Dat.*, def. 5].

[30] Entiéndase «como secciones con los planos recién trazados».

[31] [*Pues se había demostrado que las superficies de los casquetes indicados eran iguales a los círculos cuyos radios eran iguales a las rectas que unen los vértices de los casquetes con las bases* (I 42)].

[32] [*Pues los triángulos son semejantes*].

Y la síntesis se planteará así:

Sean ΑΒΓ, ΔΕΖ los dos casquetes esféricos dados; ΑΒΓ aquél al que ha de ser semejante; ΔΕΖ aquél a cuya superficie ha de tener igual la superficie; y constrúyase lo mismo que en el análisis; y hágase que ΒΓ sea a ΕΖ como ΒΘ es a ΛΝ, y con diámetro ΛΝ trácese un círculo; y considérese una esfera cuyo círculo máximo sea ΛΚΝΜ y córtese ΝΛ por el punto Ρ de manera que ΘΠ sea a ΠΒ como ΝΡ a ΡΛ [*Elem.* VI 10] y córtese la superficie mediante un plano que pase por Ρ y perpendicular a ΛΝ, y trácese la recta ΛΜ; entonces los segmentos circulares que están sobre las cuerdas ΚΜ, ΑΓ son semejantes. De modo que también los casquetes esféricos ⟨correspondientes⟩ son semejantes. Y puesto que ΘΒ es a ΒΠ como ΝΛ es a ΛΡ —pues también lo son por descomposición [*Elem.* V 18]—, mientras que también ΠΒ
206 es a ΒΓ como ΡΛ es a ΛΜ, entonces también ΘΒ es a ΝΛ como ΒΓ a ΛΜ. Y ΘΒ era a ΛΝ como ΒΓ a ΕΖ[33]; luego ΕΖ es igual a ΛΜ [*Elem.* V 9]; de manera que también el círculo que tiene por radio ΕΖ es igual al círculo cuyo radio es igual a ΛΜ; y el círculo que tiene por radio ΕΖ es igual a la superficie del casquete ΔΕΖ, mientras que el círculo cuyo radio es igual a ΛΜ es igual a la superficie del casquete ΚΛΜ —pues esto se ha demostrado en el libro I [I 42]—; luego también la superficie del casquete ΚΛΜ es igual a la superficie del casquete de esfera ΔΕΖ. Y ΚΛΜ es semejante a ΑΒΓ.

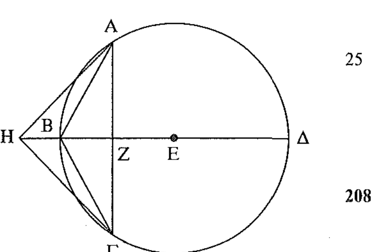
[33] Por construcción.

Proposición 7

Cortar de una esfera dada un casquete mediante un plano, de modo que el casquete guarde una razón dada con el cono que tiene la misma base e igual altura que el casquete[34].

Sea la esfera dada, cuyo círculo máximo es ABΓΔ y su diámetro BΔ.

Es preciso cortar la esfera mediante un plano que pase por AΓ, de manera que el casquete esférico ABΓ guarde con el cono ABΓ una razón igual a una dada.



Dese por hecho; y sea E el centro de la esfera, y sea la suma de EΔZ a ΔZ como HZ a ZB. Entonces el cono AΓH es igual al casquete ABΓ [Prop. 2]. Luego ha sido dada **208** la razón del cono AHΓ al cono ABΓ. Luego ha sido dada la razón de HZ a ZB [I, lema 1]. Y HZ es a ZB como la suma de EΔZ es a ΔZ. Luego la razón de la suma de EΔZ a ΔZ ha sido dada[35]. De manera que también AΓ. Y puesto que la

---

[34] Arquímedes cita el enunciado de esta proposición en *Espirales* (II 4, 23 y ss.): «Cortar de una esfera dada un casquete mediante un plano de manera que el casquete guarde con el cono que tiene la misma base que el casquete e igual altura la razón prescrita, mayor que la que guarda tres a dos».

[35] [*De manera que también la de EΔ a ΔZ; luego también ha sido dada ΔZ*].

suma de ΕΔΖ guarda con ΔΖ una razón mayor que la de la suma de ΕΔΒ con ΔΒ, y la suma de ΕΔΒ es tres veces ΕΔ y ΒΔ es dos veces ΕΔ, entonces la suma de ΕΔΖ guarda con ΔΖ una razón mayor que la de tres a dos. Y la razón de la suma de ΕΔΖ a ΖΔ es la misma que la razón dada.

Luego para la síntesis es preciso que la razón dada sea mayor que la razón de tres a dos.

Y la síntesis se planteará así:

Sea la esfera dada, cuyo círculo máximo es ΑΒΓΔ, y su diámetro ΒΔ y su centro Ε y la razón dada sea la de ΘΚ a ΚΛ, mayor que la razón de tres a dos.

Y tres es a dos como la suma de ΕΔΒ es a ΔΒ; luego ΘΚ guarda con ΚΛ una razón mayor que la que guarda la suma de ΕΔΒ con ΔΒ. Luego, por descomposición, ΘΛ guarda con ΛΚ una razón mayor que la de ΕΔ a ΔΒ. Y hágase que ΘΛ sea a ΛΚ como ΕΔ es a ΔΖ, y por el punto Ζ trácese ΑΖΓ perpendicular a ΒΔ, y por ΓΑ trácese un plano perpendicular a ΒΔ.

Digo que el casquete esférico ΑΒΓ guarda con el cono ΑΒΓ la misma razón que ΘΚ con ΚΛ.

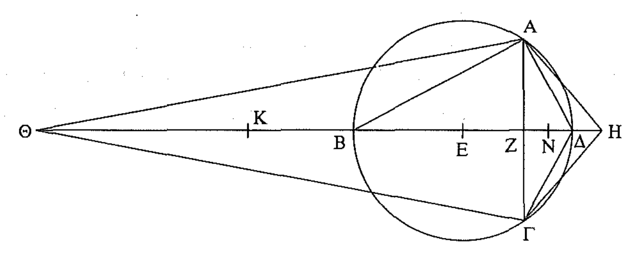
210 Hágase de modo que la suma de ΕΔΖ sea a ΔΖ como ΗΖ a ΖΒ; entonces el cono ΓΑΗ es igual al casquete esférico ΑΒΓ. Y puesto que ΘΚ es a ΚΛ como la suma de ΕΔΖ es a ΔΖ —es decir, como ΗΖ es a ΖΒ; es decir, como el cono ΑΗΓ es al cono ΑΒΓ— y el cono ΑΗΓ es igual al casquete esférico ΑΒΓ, entonces el casquete ΑΒΓ es al cono ΑΒΓ como ΘΚ es a ΚΛ.

PROPOSICIÓN 8

Si una esfera es cortada mediante un plano que no pase por el centro, el casquete mayor guarda con el menor una razón menor que el cuadrado de la que guarda la superficie del casquete mayor con la superficie del menor, pero mayor que ⟨esa razón elevada a⟩ tres medios[36].

Sea una esfera y en ella el círculo máximo ΑΒΓΔ y el diámetro ΒΔ, y córtese mediante un plano que pase por ΑΓ y perpendicular al círculo ΑΒΓΔ, y sea ΑΒΓ el casquete mayor de la esfera.

Digo que el casquete ΑΒΓ guarda con el ΑΔΓ una razón menor que el cuadrado de la que guarda la superficie del casquete mayor con la superficie del casquete menor, pero mayor que ⟨esa razón elevada a⟩ tres medios.



Trácense ΒΑ y ΑΔ, y sea Ε el centro y hágase de modo que la suma de ΕΔΖ sea a ΔΖ como ΘΖ a ΖΒ, y que la suma de ΕΒΖ sea a ΒΖ como ΗΖ a ΖΔ; y considérense unos conos que tienen por base el círculo de diámetro ΑΓ y por vértices los 212
puntos Θ, Η.

[36] ARQUÍMEDES cita este enunciado en *Espirales* (II 6, 2-9):

El cono AΘΓ será igual al casquete esférico ABΓ y el ⟨cono⟩ AΓH igual al ⟨casquete⟩ AΔΓ y el cuadrado de lado BA es al cuadrado de lado AΔ como la superficie del casquete ABΓ es a la superficie del casquete AΔΓ. Esto ya se ha explicado antes[37] [I 42 y 43; *Elem.* XII 2].

Digo que también el cono AΘΓ respecto al cono AHΓ —es decir, ZΘ con ZH [I, lema 1]— guarda una razón menor que el cuadrado de la que guardan el cuadrado de lado BA con el cuadrado de lado AΔ —es decir, BZ respecto a ZΔ—.

Y puesto que la suma de EΔZ es a ΔZ como ΘZ a ZB[38], también BZ será a ZΔ como ΘB a BE, y BE es igual a ΔE[39]. A la vez, puesto que la suma de EBZ es a BZ como HZ es a ZΔ, sea BK igual a BE. Es evidente que ΘB es mayor que BE, puesto que también BZ ⟨es mayor⟩ que ZΔ. Y KZ será a ZB como HZ a ZΔ. Y se había demostrado que ZB es a ZΔ como ΘB a BE; y BE es igual a KB; luego ΘB es a BK como KZ a ZH; y puesto que ΘZ guarda con ZK una razón menor que la de ΘB a BK y se había demostrado que ΘB es a BK como KZ a ZH, entonces ΘZ guarda con ZK una razón menor que la de KZ con ZH; luego el rectángulo ΘZH es menor que el cuadrado de lado ZK. Entonces el rectángulo comprendido por ΘZH guarda con
214 el cuadrado de lado ZK[40] una razón menor que la que guarda

---

[37] [*Se ha de demostrar que el casquete mayor de la esfera guarda con el menor una razón menor que el cuadrado de la que guarda la superficie del casquete mayor con la superficie del casquete menor*].

[38] [*Y que la suma de* EBZ *es a* BZ *como* ZH *a* ZΔ].

[39] [*Esto quedó demostrado antes junto con otras cosas*]. Por descomposición *(Elem.* V 17), EΔ : ΔZ = ΘB : ZB = BE : ΔZ; y tomando la proporción en alternancia *(Elem.* V 16) resulta lo propuesto (Heiberg).

[40] [*Esto es,* ZΘ *guarda con* ZH].

el cuadrado de lado KZ con el cuadrado de lado ZH[41]; luego ΘZ guarda con ZH una razón menor que el cuadrado de la razón que guarda KZ con ZH[42]. Esto buscábamos.

Y puesto que BE es igual a EΔ, entonces el rectángulo BZΔ es menor que el rectángulo BEΔ. Entonces ZB guarda con BE una razón menor que la de EΔ con ΔZ —es decir, la de ΘB con BZ—. Entonces el cuadrado de lado ZB es menor que el rectángulo ΘBE —es decir, el rectángulo ΘBK—.

Sea igual el cuadrado de lado BN al rectángulo ΘBK. Entonces ΘB es a BK como el cuadrado de lado ΘN al cuadrado de lado NK. Y el cuadrado de lado ΘZ guarda con el cuadrado de lado ZK una razón mayor que el cuadrado de lado ΘN con el cuadrado de lado NK[43]. Luego ΘZ guarda con ZH una razón mayor que la de KZ a ZH elevada a tres medios[44]. Y ΘZ es a ZH como el cono AΘΓ al cono AHΓ —es decir, como el casquete ABΓ al casquete AΔΓ— y por otro lado KZ es a ZH como BZ a ZΔ —es decir, como el cuadrado de lado BA al cuadrado de lado AΔ; es decir, como la superficie del casquete ABΓ a la superficie del casquete AΔΓ—.

De manera que el casquete mayor guarda con el menor una razón menor que el cuadrado de la que guarda la superficie del casquete mayor con la superficie del casquete menor, pero mayor que ⟨esa razón elevada a⟩ tres medios.

---

41 [*Y el cuadrado de lado* KZ *guarda con el cuadrado de lado* ZH *una razón que es el cuadrado de la de* KZ *a* ZH].

42 [KZ *guarda con* ZH *una razón menor que el cuadrado de la que guarda* BZ *con* ZΔ].

43 [*Y el cuadrado de lado* ΘZ *guarda con el cuadrado de lado* ZK *una razón mayor que la de* ΘB *a* BK *—es decir, la de* ΘB *a* BE*; es decir, la de* KZ *a* ZH*—*].

44 [*Esto viene al final*].

216 DE OTRA MANERA

Sea una esfera en la que ΑΒΓΔ es un círculo máximo, ΑΓ su diámetro, Ε su centro y córtese mediante un plano que pase por ΒΔ perpendicular a ΑΓ.

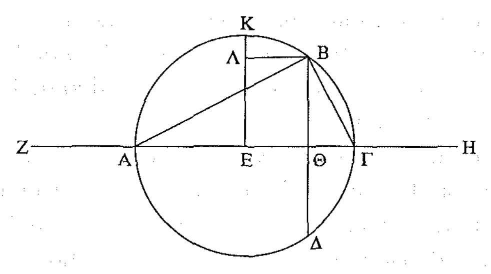
Digo que el casquete mayor ΔΑΒ guarda con el menor ΒΓΔ una razón menor que el cuadrado de la que guarda la superficie del casquete ΑΒΔ con la superficie del casquete ΒΓΔ, pero mayor que ⟨esa razón elevada a⟩ tres medios.

Trácense las rectas ΑΒ, ΒΓ; la razón de una superficie a otra superficie es la del círculo cuyo radio es ΑΒ con el círculo cuyo radio es ΒΓ [I 42-43] —es decir, la razón de ΑΘ a ΘΓ—. Póngase cada una de las rectas ΑΖ, ΓΗ igual al radio del círculo.

Entonces, la razón del casquete ΒΑΔ al ⟨casquete⟩ ΒΓΔ está compuesta de la razón que guarda el casquete ΒΑΔ con el cono cuya base es el círculo de diámetro ΒΔ y su vértice el punto Α y la de ese mismo cono con el cono que tiene la misma base y por vértice el punto Γ y la del cono indicado[45] con el casquete ΒΓΔ. Pero la razón del casquete ΒΑΔ al cono ΒΑΔ es la de ΗΘ con ΘΓ, y la del cono al cono es la de ΑΘ a ΘΓ, y la del cono ΒΓΔ al casquete ΒΓΔ es la de ΑΘ a ΘΖ. Y la razón compuesta de la de ΗΘ a ΘΓ y la de ΑΘ a ΘΓ es la del rectángulo ΗΘΑ al cuadrado de lado ΘΓ, mientras que la ⟨compuesta de la⟩ del rectángulo ΗΘ, ΘΑ al cuadrado de lado
218 ΘΓ junto con la de ΑΘ a ΘΖ es la ⟨razón⟩ del sólido de base en el rectángulo ΗΘ, ΘΑ y altura ΘΑ con el sólido de base en

[45] El segundo de los mencionados, con base en el círculo de diámetro ΒΔ y vértice en Γ.

el cuadrado de lado ΘΓ y altura en ΘΖ; y el sólido de base en el rectángulo ΗΘΑ y altura ΘΑ es el sólido de base en el cuadrado de lado ΘΑ y altura ΘΗ. Luego el sólido de base en el cuadrado de lado ΘΑ y altura ΘΗ guarda con el sólido de base en el cuadrado de lado ΓΘ y altura ΘΖ una razón menor que el cuadrado de la ⟨razón⟩ de ΑΘ a ΘΓ[46]. Luego el sólido de base en el cuadrado de lado ΑΘ y altura ΘΗ guarda con el sólido de base en el cuadrado de lado ΘΓ y altura ΘΖ una razón menor que la del sólido de base en el cuadrado de lado ΑΘ y altura ΘΗ con el sólido de base en el cuadrado de lado ΓΘ y altura ΘΗ.



Así, ⟨se ha de demostrar⟩ que el sólido de base en el cuadrado de lado ΓΘ y altura ΖΘ es mayor que el sólido de base en el cuadrado de lado ΓΘ y altura ΘΗ; luego ⟨se ha de demostrar⟩ que es mayor ΘΖ que ΘΗ[47].

Afirmo también que el casquete mayor guarda con el menor una razón mayor que la razón de las superficies ⟨elevada a⟩ tres medios.

Pero se había demostrado que la razón entre los casquetes era la misma que la que guarda el sólido de base en el cuadrado de lado ΑΘ y altura ΘΗ con el sólido de base en el

---

46 *[Y el cuadrado de la ⟨razón⟩ de ΑΘ a ΘΓ es la ⟨razón⟩ del cuadrado de lado ΑΘ al cuadrado de lado ΘΓ].*

47 Por construcción: a las rectas desiguales ΑΘ, ΘΓ se les han sumado las rectas iguales ΖΑ, ΓΗ (Eut.)

cuadrado de lado ΘΓ y altura ΘZ, mientras que la razón del cubo de arista AB con el cubo de arista BΓ es la razón de las superficies ⟨elevada a⟩ tres medios.

Afirmo que el sólido de base en el cuadrado de lado AΘ y altura ΘH guarda con el sólido de base en el cuadrado de lado ΓΘ y altura ΘZ una razón mayor que[48] el cubo de arista AΘ con el cubo de arista ΘB —es decir, mayor que la razón ⟨compuesta de la⟩ del cuadrado de lado AΘ con el cuadrado de lado BΘ y la de la recta AΘ con ΘB. La razón del cuadrado de lado AΘ con el cuadrado de lado ΘB multiplicada por la razón de AΘ a ΘB es la del cuadrado de lado AΘ al rectángulo comprendido por ΓΘB. Y la razón del cuadrado de lado AΘ al rectángulo BΘΓ es la del sólido de base en el cuadrado de lado AΘ y altura ΘH con el sólido de base en el rectángulo BΘΓ y altura ΘH.

Y digo que el sólido de base en el cuadrado de lado AΘ y altura ΘH guarda con el sólido de base en el cuadrado de lado ΓΘ y altura ΘZ una razón mayor que[49] el sólido de base en el cuadrado de lado AΘ y altura ΘH con el sólido de base en el rectángulo BΘΓ y altura ΘH.

Por tanto, se ha de demostrar que el sólido de base en el cuadrado de lado ΘΓ y altura ΘZ es menor que el sólido de base en el rectángulo BΘΓ y altura HΘ. Lo que es lo mismo que demostrar que el cuadrado de lado ΓΘ guarda con el rectángulo BΘΓ una razón menor que HΘ con ΘZ[50].

Trácese desde E la recta EK perpendicular a EΓ y desde B la recta BA perpendicular a ella[51].

---

[48] [*El cubo de arista AB con el cubo de arista BΓ, es decir*].

[49] [*El cuadrado de lado AΘ con el rectángulo comprendido por BΘΓ; es decir*].

[50] [*Por consiguiente hay que demostrar que HΘ guarda con ΘZ una razón mayor que la de ΓΘ a ΘB*].

[51] Es decir, perpendicular a EK.

Es preciso que demostremos todavía que HΘ guarda con ΘZ una razón mayor que la de ΓΘ a ΘB. Y ΘZ es igual a la suma de AΘ, KE; luego hay que demostrar que HΘ guarda con la suma de ΘA, KE una razón mayor que la de ΓΘ a ΘB; y una vez restada ΓΘ de ΘH, y ⟨restada⟩ EΛ —igual a BΘ— de KE, será necesario demostrar que la recta restante —ΓH— guarda con la restante —la suma de AΘ, KΛ— una razón mayor que ΓΘ con ΘB; es decir, ΘB con ΘA; es decir, ΛE con ΘA y, tomando la proporción en alternancia, que KE guarda con EΛ una razón mayor que la suma de KΛ, ΘA con ΘA y, 222 por descomposición, KΛ guarda con ΛE una razón mayor que la de KΛ a ΘA. Porque ΛE es menor que ΘA.

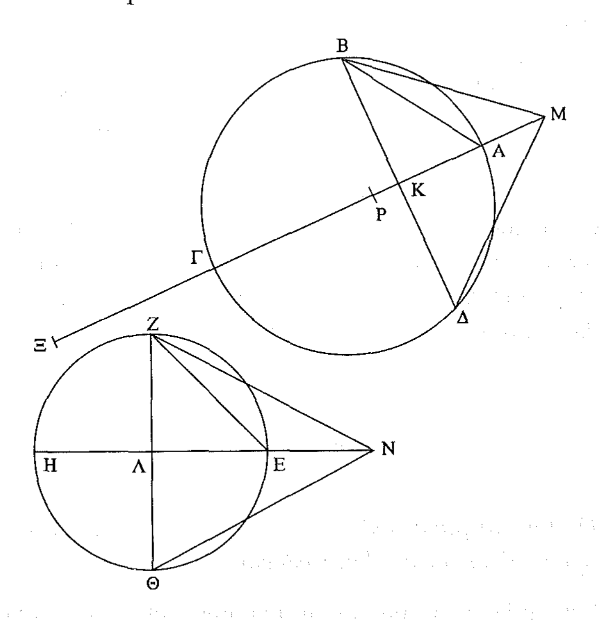
Proposición 9

De los casquetes esféricos comprendidos por la misma superficie el mayor es el hemisferio[52].

Sea en la esfera un círculo máximo ABΓΔ, AΓ su diámetro, y otra esfera cuyo círculo máximo sea EZHΘ y su diámetro EH; y córtese una esfera mediante un plano que pase por el centro; la otra, por uno que no pase por el centro; y sean los planos secantes perpendiculares a los diámetros AΓ, EH, y queden cortados[53] según las rectas ΔB, ZΘ. El casquete correspondiente al arco ZEΘ es un hemisferio de la esfera [de las secciones correspondientes al arco BAΔ en una figura, en la que está el signo *[σ⁄]*, es mayor que un hemisferio; en la

[52] Arquímedes cita este enunciado en la carta que procede a *Espirales*.
[53] Entiéndase: «los círculos máximos».

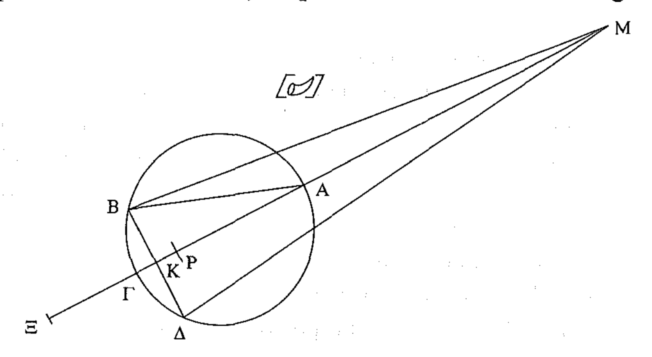
otra, menor que un hemisferio][54], y sean iguales las superficies de los casquetes indicados.



Digo que el hemisferio correspondiente al arco ZEΘ es mayor que el casquete correspondiente al arco BAΔ.

[54] De la comparación del texto de los mss. con el que nos ofrece Eutocio dedujo Heiberg una corrupción evidente: en algún momento de la transmisión, el transcriptor o un copista duplicó el razonamiento y las figuras (de ahí que una de ellas lleve la marca *[σ']* de manera innecesaria). Arquímedes debió de referirse sólo al caso del casquete mayor que el hemisferio, según se deduce del texto de Eutocio. No obstante, restituir el original sin alterar notablemente el texto se hace difícil, y relegar las interpolaciones a las notas, como veníamos tomando por norma, lo hace incomprensible, por lo que hacemos excepción aquí y mantenemos las interpolaciones y las ilustraciones tal y como las transmiten los manuscritos.

Puesto que las superficies de los casquetes indicados son iguales, es evidente que la recta BA es igual a la EZ [I 42-43 *y Elem.* XII 2] [ya se ha demostrado que la superficie de cada casquete es igual a un círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete hasta la circunfe- 224
rencia del círculo que sirve de base al casquete. Y puesto que el arco BAΔ es mayor que un semicírculo en una figura,



en la que está el signo *[σ/]*, es evidente que BA al cuadrado es menor que el doble del cuadrado de AK y mayor que el doble del cuadrado del radio[55]. Sea BA al cuadrado el doble de AP, y sea ΓΞ igual al radio del círculo ABΔ; y la razón que guarda ΓΞ con ΓK sea la que guarda MA con AK; y con base en el círculo de diámetro BΔ sea un cono con vértice en el 226
punto M. Éste es igual al casquete esférico correspondiente al arco BAΔ. Sea también EN igual a EA y con base en el círculo de diámetro ΘZ sea un cono con vértice en el punto N.

[55] La expresión «al cuadrado» (gr. *dynámei,* literalmente «en potencia»), rara en Arquímedes, la emplea Euclides frecuentemente en el libro X como sinónimo de «el cuadrado de lado ...». Si se hubiera empleado la expresión arquimedea más usual tendríamos «el cuadrado de lado BA es menor que el doble del cuadrado de lado AK pero mayor que el doble del cuadrado que tuviera por lado el radio». La figura correspondiente es la marcada con el signo *[σ/]*.

También éste es igual al hemisferio correspondiente al arco ΘΕΖ. Y el rectángulo comprendido por ΑΡΓ es mayor que el comprendido por ΑΚΓ puesto que tiene el lado menor mayor que el menor del otro, mientras que el cuadrado de lado ΑΡ es igual al rectángulo comprendido por ΑΚ, ΓΞ; pues es la mitad del cuadrado de lado ΑΒ; luego la suma es mayor que la suma[56]. Luego el rectángulo comprendido por ΜΚΓ es igual al comprendido por ΞΚΑ[57]. De manera que ΓΑ guarda con ΚΓ una razón mayor que la de ΜΚ a ΑΡ. Y la razón que guarda ΑΓ con ΓΚ es la misma que guarda el cuadrado de lado ΑΒ con el cuadrado de lado ΒΚ; por tanto es evidente que la mitad del cuadrado de lado ΑΒ, que es igual al cuadrado de lado ΑΡ, guarda con el cuadrado de lado ΒΚ una razón mayor que la que guarda ΜΚ con el doble de ΑΡ, que es igual a ΛΝ; luego también el círculo de diámetro ΖΘ guarda con el círculo de diámetro ΒΔ una razón mayor que ΜΚ con ΝΛ. De
228 manera que el cono que tiene por base el círculo de diámetro ΖΘ y por vértice el punto Ν es mayor que el cono que tiene por base el círculo de diámetro ΒΔ y por vértice el punto Μ.

Por tanto es evidente que también el hemisferio correspondiente al arco ΕΖΘ es mayor que el casquete correspondiente al arco ΒΑΔ.

[56] Es decir, «la suma del rectángulo comprendido por ΑΡΓ y el cuadrado de lado ΑΡ es mayor que la suma del rectángulo comprendido por ΑΚΓ más el rectángulo comprendido por ΑΚ, ΓΞ».

Heiberg secluye la frase [*Luego el rectángulo comprendido por ΓΑΡ es mayor que el comprendido por ΞΚΑ*].

[57] [*De manera que es mayor el comprendido por ΓΑΡ que el comprendido por ΜΚΓ*].

ARQUÍMEDES

MEDIDA DEL CÍRCULO

INTRODUCCIÓN

El tratado sobre la *Medida del círculo* es, probablemente, la obra de mayor repercusión de las de Arquímedes. El estado en que nos ha sido transmitida dista mucho de lo que debió de ser su forma primitiva: no conserva el dialecto dorio en que Arquímedes escribió sus obras, ha perdido la dedicatoria que suele preceder a los tratados, carece de definiciones, lemas, proposiciones introductorias, faltan la precisión y el rigor característicos de la elocución del siracusano... Da la sensación de que el tratado hubiera pasado por las manos de muchos maestros que, repetidamente, hubieran ido haciendo antología de su contenido hasta conservar sólo las tres proposiciones esenciales: de ahí que haya habido autores que llegan incluso a afirmar que el tratado no es obra de Arquímedes, expresión que ha de ser entendida *cum mica salis*, puesto que en realidad nadie pone seriamente en duda que la demostración relativa a la medida del círculo y el cálculo de π sean obra de Arquímedes.

El contenido de las proposiciones es el siguiente: que el área del círculo es igual a la de un triángulo rectángulo que tiene por base una recta igual a la circunferencia del círculo y por altura el radio (Prop. 1); complementaria de la anterior para proceder efectivamente a la medida del círculo, el cál-

culo de la razón entre el diámetro de un círculo y su circunferencia, razón comprendida entre 1/7 y 10/71 (Prop. 3); recurriendo a razonamientos dependientes de esos dos resultados, demuestra, por último, que la razón entre el círculo y el cuadrado construido sobre su diámetro es la de 11/14 (Prop. 2), cálculo que viene a complementar un teorema antiguo dentro de la geometría griega —atribuido generalmente a Hipócrates de Quíos y recogido por Euclides en *Elementos* XII 2— que afirma que los círculos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus diámetros. El hecho de que esta última demostración preceda al cálculo de la razón entre la circunferencia y su diámetro es una anomalía más que añadir al estado del texto en nuestros manuscritos.

Eutocio conoció el tratado en una versión muy próxima a la nuestra, también con tres proposiciones alteradas en su orden lógico, aunque con un texto algo más completo. En su comentario se hace eco de la queja emitida por otros exégetas, que reclamaban que no estaba demostrado, ni por Arquímedes ni por ningún otro, cómo tomar una recta igual a la circunferencia de un círculo. Eutocio excusa la ausencia de esa demostración afirmando que nadie cuestiona la existencia de una recta tal, de modo que, a su entender, no se puede acusar a Arquímedes de haber escrito nada fuera de lo conveniente; pero sus explicaciones, en realidad, lo único que prueban es que no llegó a conocer de primera mano el tratado *Sobre las espirales,* a pesar de que tenía noticias sobre el mismo gracias a la *Vida de Arquímedes,* de Heraclides. Este último autor afirmaba que Arquímedes «había descubierto una recta igual a la circunferencia dada de un círculo gracias a ciertas espirales». Efectivamente, en *Espirales* 20 se demuestra que la longitud de la circunferencia de radio igual al radio vector de un punto de la espiral es

igual a la de la subtangente polar correspondiente a ese punto[1].

Un elemento de especial originalidad en el tratado, como ya señaló Mugler[2], es la renuncia a la cuadratura precisa del círculo, sustituida por la triangulación; el otro es la intención geodésica en el sentido griego del término[3]: Arquímedes había cumplido con las exigencias del método deductivo característico de la geometría griega al demostrar que la superficie del círculo —cuya medida se desconocía— es igual a la de determinado triángulo rectángulo —figura cuya medida sí era posible conocer y calcular—. Pero eso no resolvía el problema *métrico,* que requería apearse de la pureza de las formas geométricas y los números enteros objeto de la teoría de números (la *arithmētikḗ)* para mancharse en el fango de los números fraccionarios y de las raíces cuadradas de irracionales que la logística y la geodesia requerían. El de la *Medida del círculo* es el único tratado geométrico en que su autor se enfrenta a cálculos, y no está de más recordar, aun siendo tópico, que en los *Elementos* de Euclides no hay más números que los que sirven para ordenar las proposiciones.

Estos elementos de originalidad coexisten con el arraigo en la tradición geométrica en la que sin duda hay que incluir el planteamiento del tratado: el problema de la cuadratura

[1] Cf. HEATH, *A history of Greek Mathematics* I 230-231.

[2] *Ed. cit.,* vol. I, pág. XV.

[3] Recordemos que en la matemática griega había que distinguir entre una matemática «más honorable y primera» —formada por la aritmética y la geometría— y otra «que se ocupa de lo sensible» (HERÓN, *Definitiones,* pág. 165) —dentro de la cual están la logística, la geodesia, la canónica, la óptica, la mecánica y la astronomía—. La geodesia se plantea como fin el de dar solución a las cuestiones efectivas de medida de superficies.

del círculo había sido objeto de estudio desde antiguo[4], unas veces con más rigor que otras. Dos de las soluciones tenidas por menos rigurosas pudieron ser, sin embargo, las que pusieron en el camino adecuado a Arquímedes. Nos referimos a las de Antifonte y Brisón. El primero —sofista de profesión, que no matemático— había sugerido que inscribiendo sucesivamente en el círculo polígonos de número de lados cada vez más elevado se llegaría a un punto en que el polígono inscrito llegaría a ser igual al círculo[5], lo que abría camino a la idea de la *aproximación* al círculo mediante la duplicación del número de lados de polígonos inscritos; Brisón, por su parte, sugirió que si en un círculo se inscribe un cuadrado y se circunscribe otro y, a continuación, se toma un cuadrado intermedio entre ambos, entonces, el cuadrado mencionado en último lugar es mayor que el inscrito y menor que el circunscrito y lo mismo le ocurre al círculo; por tanto, ese cuadrado intermedio —decía— es igual al círculo. Así expresado resulta un tanto burdo, pero también es cierto que otras fuentes dicen que Brisón no se servía de cuadrados inscritos y circunscritos, sino de polígonos de mayor número de lados, y eso representaría una aproximación más razonable al círculo y cierto perfeccionamiento de la propuesta de Antifonte[6]. Lo que Arquímedes añade a estas in-

---

[4] La primera aproximación a la cuadratura, la de las lúnulas de Hipócrates de Quíos, podemos datarla aproximadamente a mediados del siglo v a. C., y la medida de la difusión del problema nos la da un pasaje de ARISTÓFANES (*Aves* 1005) en el que se bromea sobre esa cuestión como si fuese, al menos de nombre, conocida para todos los atenienses.

[5] Razonamiento que ya rechaza ARISTÓTELES, en *Física,* 185a15-18.

[6] Hay que reconocerle a Brisón que efectivamente *uno* de esos cuadrados intermedios tenía que ser igual al círculo, y hemos de reconocer que su razonamiento es el primero que actúa siguiendo un razonamiento topológico de continuidad.

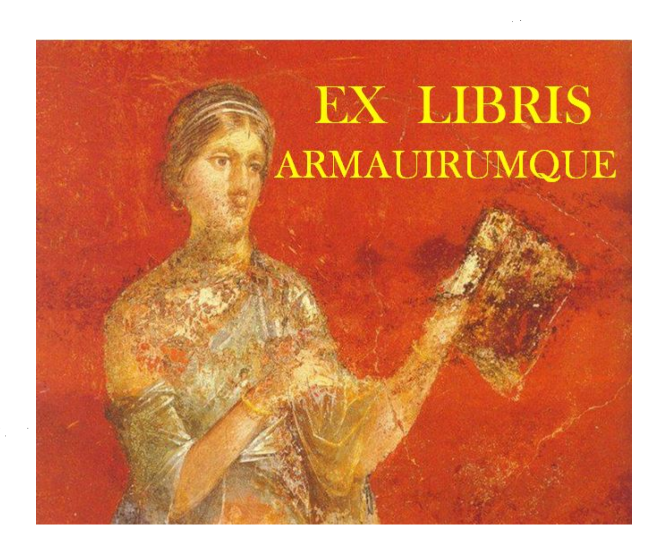
tuiciones matemáticamente insuficientes es, por un lado, el ya mencionado recurso a la triangulación —homólogo del medio empleado en la medida de los polígonos regulares— y, por otro, el método de compresión y la demostración por reducción al absurdo, métodos —ahora sí— aceptables desde el punto de vista matemático.

Pero lo que más llama la atención de los matemáticos de nuestro tiempo son las aproximaciones de $\sqrt{3}$ que Arquímedes emplea sin explicación alguna a lo largo del desarrollo de la Prop. 3: respectivamente 265/153 ($< \sqrt{3}$, en 236, 15-16) y 1351/780 ($> \sqrt{3}$, en 240, 13-14). Para situar la cuestión en el lugar que le corresponde, recordemos primero que Aristarco, apenas una generación anterior a Arquímedes, utiliza la poco afinada $\sqrt{[(50-1) / 5]}$ como aproximación de $\sqrt{2}$, lo que hace aún más sorprendente la precisión de la aproximación ofrecida en este tratado; y también que hasta los *Metrica* de Herón (s. I a. o d. C.; los estudiosos no consiguen encontrar datos para afinar más la cronología) o el *Comentario* de Teón (s. IV d. C.) al *Almagesto* de Ptolomeo no encontramos en la literatura matemática griega descripción de los algoritmos empleados para el cálculo de raíces cuadradas. La investigación sobre este punto ha producido gran abundancia de trabajos[7] cuyos resultados no tienen otro carácter sino el hipotético: lo único que parece claro es que los cálculos de los matemáticos griegos en este terreno dependían probablemente —como los nuestros propios— de

[7] La amplia literatura revisada por HEATH (*Archimedes*, págs. LXXXIV-XCIX) quedó en parte desautorizada con la aparición en 1896 del manuscrito de los *Metrica* de Herón, fuente a la que sí pudo ya remitir en *A History...* II 51. DIJKSTERHUIS (*Archimedes*, 229) se hace eco de algunos otros trabajos, así como MUGLER (*Archimède*, vol. I, pág. 137).

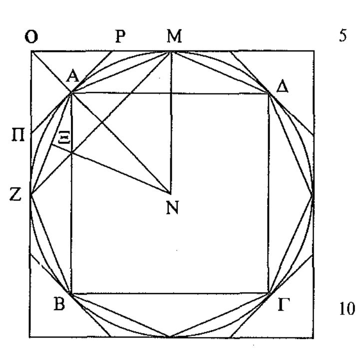
la fórmula $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (demostrada geométricamente en *Elementos)*.

En la Prop. 3 Arquímedes no ofrece ninguna explicación de los cálculos que lleva a cabo, sino que se limita a reseñar los resultados: el detalle de estas operaciones nos ha sido transmitido por el *Comentario* de Eutocio.



Proposición 1 I 232

Todo círculo es igual a un triángulo rectángulo cuyo radio es igual a uno de los lados que forman el ángulo recto y el perímetro es igual a la base[1].



Téngase el círculo ΑΒΓΔ en relación con el triángulo Ε[2] como se ha supuesto.

Digo que es igual.

Si es posible, sea mayor el círculo, e inscríbase el cuadrado ΝΞ y córtense los arcos por la mitad y sean los segmentos menores que el exceso[3] en que el círculo excede al triángulo.

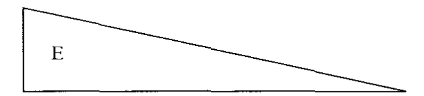
---

[1] Es decir, el otro cateto. En cuanto a la inexistencia de demostración sobre la medida de la circunferencia, v. la Introducción al tratado, págs. 238 y ss.

[2] La cita que Eutocio nos da para este punto *(Com.,* pág.143 Mugler) «*Tenga uno de los lados que forman el ángulo recto igual al radio y el otro igual a la circunferencia*» no coincide con el texto que figura en nuestros manuscritos.

[3] Hemos de entender que el sentido de la frase es «inscríbanse figuras rectilíneas duplicando sucesivamente el número de lados de las mismas

Entonces la figura rectilínea ya es mayor que el triángu-
234 lo. Tómese el centro N y[4] la perpendicular NΞ. Entonces NΞ es menor que el lado del triángulo[5]. Y el perímetro de la figura rectilínea también es menor que el otro[6], puesto que también es menor que el perímetro del círculo [*Esf. cil.* I 10, 1-6]. Luego la figura rectilínea es menor que el triángulo E. Lo cual es absurdo.



Sea el círculo, si es posible, menor que el triángulo E.

Y circunscríbase el cuadrado y córtense por la mitad los arcos y trácense tangentes por los puntos[7]. Entonces, el ángulo correspondiente a OAP es recto [*Elem.* III 18]. Por tanto, OP es mayor que MP, pues PM es igual a PA. Por tanto, el triángulo POΠ es mayor que la mitad de la figura OZAM. Queden ⟨segmentos⟩ semejantes al segmento ΠZA, menores que el exceso en que excede E al círculo ABΓΔ [*Elem.* X 1]. Entonces, la figura rectilínea circunscrita ya es menor que E. Lo cual es absurdo, puesto que es mayor, porque NA es igual al cateto del triángulo y el perímetro[8] es mayor que la base del triángulo[9].

Luego el círculo es igual al triángulo E.

---

hasta que los segmentos sean menores que el exceso...» etc. El original de Arquímedes era probablemente más preciso que el texto en su estado actual.

[4] Hay que sobreentender «trácese».

[5] Es decir, menor que el cateto igual al radio.

[6] Es decir, «que el otro cateto», el que era igual al perímetro del círculo.

[7] Entiéndase «por los puntos de tangencia».

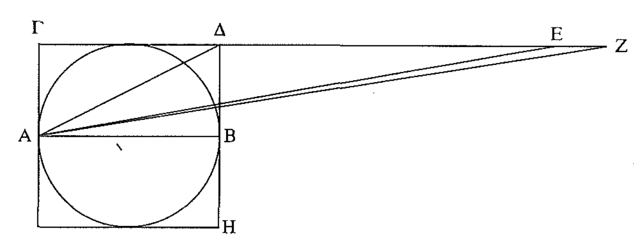
[8] El perímetro «del polígono circunscrito», se entiende.

[9] Por hipótesis era igual a la circunferencia, y ésta es menor que el perímetro del polígono circunscrito [*Esf. cil.* I 1].

PROPOSICIÓN 2

El círculo guarda con el cuadrado levantado sobre su diámetro la razón de 11 a 14.

Sea un círculo cuyo diámetro sea AB, y circunscríbase el cuadrado ΓH, y sea ΔE el doble de ΓΔ y EZ un séptimo de ΓΔ[10].



Puesto que AΓE guarda con AΓΔ la razón de 21 a 7 y AΓΔ guarda con AEZ la razón de 7 a 1, AΓZ es a AΓΔ como 22 a 7 [*Elem.* VI 1]. Pero el cuadrado ΓH es el cuádruple de AΓΔ 236
[*Elem.* I 34], y el triángulo AΓΔZ es igual al círculo AB[11].

Por tanto, el círculo guarda con el cuadrado ΓH la razón de 11 a 14.

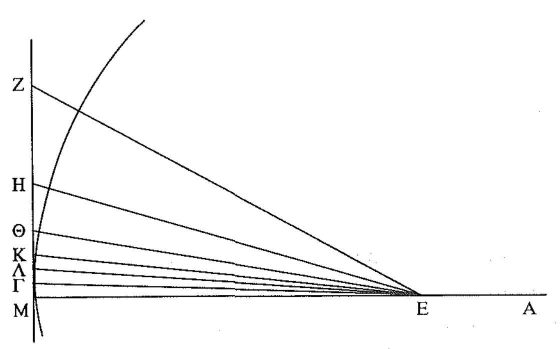
[10] Para alcanzar esta construcción ha de darse por demostrada la tesis de la proposición 3.

[11] [*Puesto que el cateto AΓ es igual al radio y la base es el triple del diámetro y se demostrará que lo excede muy aproximadamente en un séptimo* (Prop. 3, Prop. 1)].

PROPOSICIÓN 3

El perímetro de todo círculo es el triple del diámetro y además excede de él en menos de un séptimo del diámetro, pero en más de diez setentayunavos.

Sea un círculo y AΓ su diámetro y E su centro y ΓΛZ una tangente y el ángulo correspondiente a ZEΓ un tercio de un recto.



Entonces EZ guarda con ZΓ la razón de 306 a 153, y EΓ guarda con ΓZ la razón de 265 a 153 [12].

Divídase en dos partes iguales el ángulo ZEΓ mediante la recta EH; entonces, ZE es a EΓ como ZH a HΓ[13]. Luego la suma de ZE, EΓ es a ZΓ como EΓ a ΓH. De manera que ΓE guarda con ΓH una razón mayor que la de 571 a 153. Luego el
238 cuadrado de lado EH guarda con el cuadrado de lado HΓ la

[12] Sobre los cálculos conducentes a esta afirmación, cf. la Introducción a este tratado, págs. 241-242.

[13] [*Y tomando la proposición en alternancia y por composición*]. Esta adición está tomada del *Comentario* de Eutocio, si bien el copista que la incluyó no lo hizo en el lugar adecuado.

razón de 349.450 a 23.409. Luego en longitud guardan la razón de 591 1/8 a 153.

Córtese de nuevo por la mitad el ángulo ΗΕΓ mediante ΕΘ; entonces, por el mismo razonamiento, ΕΓ guarda con ΓΘ una razón mayor que la de 1.162 1/8 a 153; entonces ΘΕ guarda con ΘΓ una razón mayor que la de 1.172 1/8 a 153.

Córtese de nuevo por la mitad el ángulo ΘΕΓ mediante ΕΚ; entonces ΕΓ guarda con ΓΚ una razón mayor que la de 2.334 1/4 a 153; entonces ΕΚ guarda con ΓΚ una razón mayor que la de 2.339 1/4 a 153.

De nuevo córtese por la mitad el ángulo ΚΕΓ mediante ΛΕ; entonces ΕΓ guarda con ΛΓ[14] una razón mayor que la de 4.673 1/2 a 153.

Puesto que el ángulo correspondiente a ΖΕΓ, que era un tercio de un recto, ha sido cortado cuatro veces por la mitad, el ángulo correspondiente a ΛΕΓ es 1/48 de un recto. Póngase el ángulo ΓΕΜ igual a éste[15], con vértice en E; entonces el ángulo correspondiente a ΛΕΜ es 1/24 de un recto. Y, por consiguiente, la recta ΛΜ es el lado de un polígono de 96 la- 240 dos circunscrito al círculo.

Entonces, puesto que se había demostrado que ΕΓ guarda con ΓΛ una razón mayor que la de 4.673 1/2 a 153, mientras que ΑΓ era el doble de ΕΓ y ΛΜ era el doble de ΓΛ, entonces también ΑΓ guarda con el perímetro del polígono de 96 ángulos una razón mayor que la de 4.673 1/2 a 14.688. Y es el triple con un exceso de 667 1/2, lo cual es menor que un séptimo de 4.673 1/2.

De modo que el polígono circunscrito al círculo es el triple del diámetro más algo menos de una séptima parte. Luego con más razón el perímetro del círculo es menor que el triple más una séptima parte.

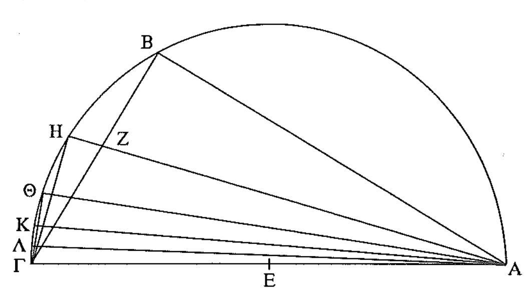
---

[14] [*En longitud*].

[15] Es decir, igual al ángulo ΑΕΓ.

Sea un círculo y ΑΓ su diámetro y sea el ángulo ΒΑΓ un tercio de un recto.

Entonces ΑΒ guarda con ΒΓ una razón menor que la de 1.351 a 780[16].



Córtese por la mitad el ángulo ΒΑΓ mediante ΑΗ. Puesto que el ángulo ΒΑΗ es igual al ΗΓΒ [*Elem.* III 26] pero también al ΗΑΓ, entonces el ΗΓΒ también es igual al ΗΑΓ. Y el ángulo recto ΑΗΓ es común [*Elem.* III 31]. Entonces también el tercer ángulo ΗΖΓ es igual al tercer ángulo ΑΓΗ [*Elem.* I 32]. Luego el triángulo ΑΗΓ es equiángulo respecto al triángulo ΓΗΖ. Luego ΑΗ es a ΗΓ como ΓΗ a ΗΖ y como ΑΓ a ΓΖ [*Elem.* VI 4]. Pero ΑΓ es a ΓΖ como la suma de ΓΑΒ es a ΒΓ; y la suma de ΒΑΓ es a ΒΓ como ΑΗ es a ΗΓ. Por eso en-
242 tonces ΑΗ guarda con ΗΓ una razón menor que la de 2.911 a 780 y ΑΓ con ΓΗ una razón menor que la de 3.013 1/2 1/4 a 780.

Córtese por la mitad ΓΑΗ mediante ΑΘ; por el mismo razonamiento, entonces, ΑΘ guarda con ΘΓ una razón menor que la de 5.924 1/2 1/4 a 780, o menor que la de 1.823 a 240 —pues cada uno es los 4/13 de cada uno[17]—. De mane-

---

[16] [*ΑΓ guarda con ΓΒ la razón de 1.560 a 780*]. Sobre los cálculos conducentes a esta afirmación, cf. la Introducción a este tratado, págs. 241-242.

[17] La literalidad del texto ofrece algún problema: para Heiberg el femenino empleado *hekatérā* se refiere, de modo impropio, a *eutheîa*, «rec-

ra que ΑΓ guarda con ΓΘ ⟨una razón menor⟩ que la de 1.838 9/11 a 240.

Córtese de nuevo por la mitad el ángulo ΘΑΓ mediante ΚΑ; y ΑΚ guarda con ΚΓ una razón menor que la de 1.007 a 66, puesto que cada uno es los 11/40 de cada uno. Entonces ΑΓ guarda con ΚΓ ⟨una razón menor⟩ que la de 1.009 1/6 a 66.

Córtese de nuevo por la mitad el ángulo ΚΑΓ mediante ΛΑ. Entonces ΑΛ guarda con ΛΓ una razón menor que la de 2.016 1/6 a 66, mientras que ΑΓ guarda con ΓΛ una razón menor que la de 2.017 1/4 a 66. Entonces, tomando la proporción invertida, el perímetro del polígono guarda con el diámetro una razón mayor que la de 6.336 a 2.017 1/4, lo cual es más que el triple y 10/71 de 2.017 1/4.

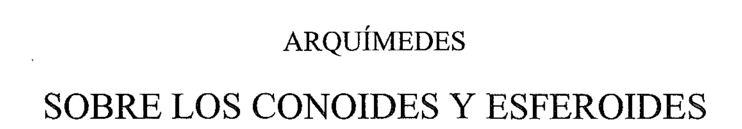
Luego el perímetro del polígono de 96 lados inscrito en el círculo es más del triple del diámetro y 10/71.

Luego el perímetro del círculo es triple del diámetro y algo menos de una séptima parte, pero más de 10/71.

---

ta» y considera más conveniente, como han sugerido algunos otros intérpretes, sustituir el femenino por un masculino y entender que se refiere a *hóros,* «término». A mi entender, dado que las figuras que está considerando son triángulos, podría referirse a las rectas como lados de triángulos (fem. *pleurā̆),* y eso permitiría mantener la lectura *hekatérā,* en femenino, transmitida por los manuscritos. Los «cada uno» que aparecen más adelante (242, 7-8) deben ser entendidos del mismo modo que los señalados al principio de esta nota.

En cualquier caso, se refiere aquí a la simplificación 5924 ½ 1/4 : 780 : : (1823 x 4)/13 : (240 x 4)/13.



ARQUÍMEDES

SOBRE LOS CONOIDES Y ESFEROIDES

INTRODUCCIÓN

El tratado conserva el dialecto dorio propio de los escritos originales de Arquímedes, y en él podemos distinguir tres partes: en primer lugar, la carta que precede al tratado, dirigida a Dosíteo, que tras la salutación y el mensaje de envío incluye las definiciones necesarias, un lema y la presentación de los resultados más relevantes de la investigación, a saber: la determinación de la relación entre los segmentos cortados de paraboloides, hiperboloides o elipsoides y los conos que tienen la misma base y el mismo eje que los segmentos.

Vienen a continuación las treinta y dos proposiciones conservadas, de las cuales las 1-20, tienen carácter propedeútico y contienen el estudio de las propiedades de las tangentes a las cónicas (3), de los planos tangentes a los sólidos de revolución (15-17), y de las secciones de conoides y esferoides (11-14 y 18-19) así como un estudio de la relación entre la elipse y el círculo (4-6); figura también la resolución de los problemas de construcción de conos y cilindros que contengan en su superficie una elipse dada (7-9), construcciones necesarias para la posterior aplicación del método de compresión; las proposiciones 1 y 2 demuestran ciertas propiedades de las sumas de proporciones y progresiones.

La proposición 20, la más típicamente arquimedea de esta primera parte, nos presenta la adaptación del método de compresión a las figuras objeto de estudio: cómo inscribir y circunscribir en un segmento de conoide o esferoide —cortado mediante un plano no perpendicular a su eje— figuras sólidas compuestas de troncos de cilindro de manera que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que cualquier magnitud sólida propuesta. Añadiendo estos resultados a los descubrimientos de los geómetras anteriores y siguiendo sus métodos característicos de compresión y reducción al absurdo, Arquímedes consigue los resultados principales del tratado, que figuran en las proposiciones 21-32:

—El segmento cortado de un paraboloide de revolución mediante un plano perpendicular al eje es una vez y media el cono que tiene la misma base y el mismo eje.

—Cortados de cualquier manera dos segmentos de un paraboloide de revolución, guardan entre sí una razón que es la del cuadrado de sus ejes.

—El segmento cortado del hiperboloide mediante un plano perpendicular al eje guarda con el cono que tiene la misma base y el mismo eje la razón que guardan entre sí la recta suma del eje del segmento más el triple de la que se añade al eje con la recta suma del eje del segmento más el doble de la añadida al eje.

—Los planos tangentes a los elipsoides lo son en un solo punto y la recta que une los puntos de tangencia pasa por el centro.

—Si se corta un elipsoide mediante un plano perpendicular al eje que pase por el centro, cada uno de los segmentos resultantes es el doble del cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje.

—Si el elipsoide es cortado mediante un plano perpendicular al eje pero que no pase por el centro, el segmento

mayor guardará con el cono que tenga la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que la recta suma del semieje del elipsoide más el eje del segmento menor con el segmento menor, y el segmento menor guardará con el cono que tenga la misma base y el mismo eje que él la razón que guarden entre sí la recta suma del semieje del elipsoide más el eje del segmento mayor con el eje del segmento mayor.

—Y si un elipsoide es cortado mediante un plano que pasa por el centro pero no es perpendicular al eje, cada uno de los segmentos resultantes será el doble del cono de base elíptica cuya base y eje sean iguales a los del segmento.

—De modo análogo al caso visto más atrás, si un elipsoide es cortado mediante un plano que no pasa por el centro ni es perpendicular al eje, el segmento mayor guardará con el cilindro de base elíptica que tenga la misma base y la misma altura que él la misma razón que la recta equivalente a la suma de la mitad de la recta que une los vértices de los segmentos más el segmento menor con el eje del segmento menor y el segmento menor guardará con el cono de base elíptica que tenga la misma base y el mismo eje que él la misma razón que la mitad de la recta que une los vértices de los segmentos más el eje del segmento mayor con el eje del segmento mayor.

Todas estas cuestiones pertenecen al tipo clásico de problemas de aplicación de volúmenes, y Arquímedes precisa en la carta que precede al *Método* (II 428, 8-12) que todas las figuras estudiadas resultan ser iguales en volumen a otras de cilindros y conos, es decir, a volúmenes limitados por superficies curvas, pero que no ha conseguido hallar la equivalencia de estos conoides y esferoides con figuras tridimensionales rectilíneas. Y es que Arquímedes había descubierto previamente mediante el método mecánico los re-

sultados principales alcanzados en el tratado: el volumen del elipsoide de revolución se estudia en *Mét.* 3, el del segmento de paraboloide en *Mét.* 4, el del hiperboloide en *Mét.* 11, y el del segmento de elipsoide cortado mediante un plano perpendicular al eje en *Mét.* 8.

Nótese también que, en la carta que precede al tratado, Arquímedes menciona otros teoremas cuya resolución deriva de los resultados de este tratado: los elipsoides semejantes y los segmentos semejantes de paraboloides, hiperboloides y elipsoides guardan entre sí una razón que es el cubo de la de sus ejes; en los elipsoides, los cuadrados construidos sobre los ejes menores son inversamente proporcionales a los ejes mayores y, a la inversa, si los cuadrados construidos sobre los ejes menores son inversamente proporcionales a los ejes mayores, los elipsoides son iguales. También la inversa de las cuestiones resueltas en los teoremas principales podría resolverse, a saber, el problema de conseguir, dado un cilindro, un cono o una esfera cortar un segmento de una figura conoide o elipsoide dada igual al cilindro, el cono o la esfera dados.

Arquímedes a Dosíteo, que le vaya bien. I 246

Te escribo y te mando en este libro las demostraciones de los demás teoremas que no tenías en lo que te mandé antes y de otros que hallé después por añadidura, en cuya resolución había fallado tras haber intentado muchas veces estudiarlos porque me parecía que tenían algún punto difícil. Por eso ni siquiera publiqué los planteamientos con los otros. Pero después, dedicándome a ellos con más afán, descubrí lo que me fallaba. Las proposiciones pendientes de los primeros teoremas versaban sobre el paraboloide, mientras que los que he descubierto ahora, sobre el hiperboloide y los elipsoides, a los que llamo «alargados» y «aplastados».

En cuanto al paraboloide se había propuesto lo siguiente: si al hacer girar una parábola permaneciendo fijo su diámetro[1], vuelve de nuevo al lugar desde el que empezó a moverse, llámese paraboloide la figura comprendida por la parábola, y llámese eje[2] al diámetro que ha permanecido fijo, y llámese vértice al punto en el que el eje toca a la superficie del paraboloide. Y si un plano toca a un paraboloide y 248
otro plano, trazado paralelo al plano tangente, corta un segmento del paraboloide, llámese base del segmento cortado a ⟨la parte del⟩ plano comprendida por el segmento de paraboloide en el plano secante, y vértice al punto en que el otro

[1] Cf. Introducción, pág. 47.

[2] Eje «del paraboloide», se entiende.

plano es tangente al paraboloide, y eje a ⟨la parte de⟩ la recta trazada por el vértice del segmento paralela al eje del paraboloide comprendida en el interior del segmento.

Se propuso estudiar lo siguiente: por qué, si se cortan mediante un plano perpendicular al eje segmentos del paraboloide, el segmento cortado será una vez y media el cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje. Y por qué, si se cortan de un paraboloide dos segmentos mediante planos trazados de cualquier manera, los segmentos cortados guardarán entre sí una razón que es el cuadrado de la de sus ejes[3].

En cuanto al hiperboloide, supongamos lo siguiente: si una hipérbola y su diámetro y las asíntotas de la hipérbola están en un plano, y permaneciendo fijo el diámetro se hace girar el plano en que están las líneas mencionadas, y vuelve de nuevo al lugar desde el que empezó a moverse, es evidente que las asíntotas de la hipérbola comprenderán un cono isósceles cuyo vértice será el punto en que las asíntotas se cortan, y el eje será el diámetro que permaneció fijo. A la figura comprendida por el giro de la hipérbola llámesela hiperboloide y al diámetro que ha permanecido fijo, su eje, y vértice al punto en que el eje toca la superficie del hiperboloide. Al cono comprendido por las asíntotas de la hipérbola llámesele el que comprende al hiperboloide, y a la recta que queda entre el vértice del hiperboloide y el vértice del cono que comprende al hiperboloide llámesela la añadida al eje. Y si un plano toca al hiperboloide y otro plano, paralelo al tangente, corta un segmento del hiperboloide, llámese base del segmento cortado a la ⟨parte del plano⟩ comprendida por la sección del hiperboloide en el plano secante, y vértice al

[3] Las demostraciones figuran, respectivamente, en las proposiciones 21 y 24.

punto en el que el plano tangente toca al hiperboloide, y llámese eje a ⟨la parte de⟩ recta que queda en el interior del segmento trazada por el vértice del segmento y por el vértice del cono que comprende al hiperboloide, y a la parte que queda entre los vértices mencionados llámesela la añadida al eje.

Los paraboloides son todos semejantes[4], pero de los hiperboloides llámese semejantes a aquéllos en los que los conos que comprenden a los hiperboloides sean semejantes[5].

Se propone estudiar lo siguiente: por qué, si mediante un plano perpendicular al eje se cortan segmentos de un hiperboloide, el segmento cortado guarda con el cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que la recta suma de una recta igual al eje del segmento
más el triple de la añadida al eje con una recta igual a la 252
suma del eje del segmento más el doble de la añadida al eje[6]; y por qué, si se corta un segmento de un hiperboloide mediante un plano no perpendicular al eje, el segmento cortado guarda con la figura que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje —y que es un tronco de cono— la misma razón que una recta igual a la suma del eje del segmento más el triple de la añadida al eje con una recta igual a

---

[4] La demostración aparece en APOLONIO, *Cónicas* VI 11 (conservado sólo en versión árabe). EUTOCIO *(Comentario a Equilibrio de los Planos,* II 2) afirma que la demostración la había llevado a cabo Apolonio, pero el modo de expresión de Arquímedes parece indicar que esa demostración ya existía en alguna obra más antigua o que el propio Arquímedes lo había demostrado en algún otro escrito que no conocemos, por lo que la indicación de Eutocio ha de interpretarse en el sentido de que *en su tiempo* sólo era accesible en la obra de Apolonio.

[5] EUCLIDES, *Elem.* XI, def. 24: «Son semejantes los conos y los cilindros en los que los ejes y los diámetros de las bases están en proporción».

[6] Se demuestra en la proposición 25.

la suma del eje del segmento más el doble de la añadida al eje[7].

Sobre las figuras elipsoides supongamos lo siguiente: si al hacer girar una elipse, permaneciendo fijo su diámetro mayor, vuelve de nuevo al lugar desde el que empezó a moverse, llámese elipsoide alargado a la figura comprendida por la elipse; y si tras hacerla girar permaneciendo fijo su diámetro menor vuelve de nuevo al lugar desde el que empezó a moverse, llámese elipsoide aplastado a la figura comprendida por la elipse. En cada uno de estos elipsoides llámese eje al diámetro que ha permanecido fijo; vértice, al punto en que el eje toca a la superficie del elipsoide; y llámese centro al punto medio del eje, y diámetro a la recta que pasa por el centro trazada perpendicular al eje. Si planos paralelos tocan sin cortar a cualquiera de las dos figuras
254 elipsoides y se traza paralelo a los planos tangentes otro plano que corte al elipsoide, llámese base de los segmentos resultantes a la ⟨parte del plano⟩ comprendida por la sección del elipsoide en el plano secante; vértices, a los puntos en que los planos paralelos tocan al elipsoide; ejes a ⟨las partes de⟩ las rectas que unen los vértices[8] comprendidas en el interior de los segmentos.

Demostraremos que los planos tangentes al elipsoide tocan en un solo punto su superficie y que la recta que une los puntos de contacto pasa por el centro del elipsoide[9].

De las figuras elipsoides llámese semejantes a aquéllas en las que sus ejes guardan la misma razón con sus diámetros. Los segmentos de las figuras elipsoides y conoides llámense semejantes si son quitados[10] de figuras semejantes

[7] *Id.*, prop. 26.

[8] Es decir, «los del elipsoide».

[9] La demostración figura en la proposición 16.

[10] Es decir, «cortados».

y tienen las bases semejantes y sus ejes o bien son perpendiculares a los planos de las bases o, formando ángulos iguales con los diámetros homólogos de las bases, guardan entre sí la misma razón que los diámetros homólogos de las bases.

Sobre los elipsoides se propone estudiar lo siguiente: por qué, si alguna de las figuras elipsoides es cortada por un plano que pase por el centro perpendicular al eje, cada uno de los segmentos resultantes será el doble del cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje[11], mientras que si fuera cortado por un plano perpendicular al eje pero que no pase por el centro, de los segmentos resultantes el mayor guardará con el cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que la recta igual a la suma de la mitad de la recta que es el eje del elipsoide más el eje del segmento menor con el eje del segmento menor; mientras que el segmento menor guarda con el cono que tiene la misma base que el segmento menor y el mismo eje la misma razón que la recta igual a la suma de la mitad de la recta que es el eje del elipsoide más el eje del segmento mayor con el eje del segmento mayor[12]. Y por qué si uno de los elipsoides es cortado por un plano que pase por el centro, pero no perpendicular al eje, cada uno de los segmentos resultantes será el doble de la figura que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje —la figura es un tronco de cono—[13]. Y si un elipsoide es cortado por un plano que ni pasa por el centro ni es perpendicular al eje, de las figuras resultantes la mayor guardará con la figura que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que la recta igual a la suma de la recta que es la

[11] *Id.*, prop. 27.

[12] Se demuestra en las proposiciones 31 y 29 respectivamente.

[13] *Id.*, prop. 28.

mitad de la que une los vértices de los segmentos más el eje del segmento menor con el eje del segmento menor, mientras que el segmento menor guardará con la figura que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que guarda la recta igual a la suma de la recta que es la mitad de la que une los vértices de los segmentos más el eje del segmento mayor con el eje del segmento mayor —también en este caso la figura es un tronco de cono—[14].

258 Una vez demostrados los teoremas indicados, por medio de *ellos se resuelven muchos teoremas y problemas como,* por ejemplo, éste: que los elipsoides semejantes y los segmentos semejantes de las figuras elipsoides y conoides guardan entre sí una razón que es la de los cubos de sus ejes, y que en las figuras elipsoides iguales los cuadrados construidos sobre sus diámetros son inversamente proporcionales a los ejes, y que si los cuadrados de los diámetros de las figuras elipsoides son inversamente proporcionales a sus ejes, los elipsoides son iguales[15]. Y un problema como éste, por ejemplo: de una figura conoide o elipsoide dada, cortar un segmento mediante un plano trazado paralelo a un plano dado de manera que el segmento cortado sea igual a un cono o a un cilindro dados o a una esfera dada.

Habiendo redactado primero los teoremas y las precisiones necesarias para sus demostraciones, te escribiré después las proposiciones. Que te vaya bien.

---

[14] Las demostraciones aparecen en las proposiciones 32 y 30 respectivamente.

[15] Estas demostraciones no figuran ni en este tratado ni en el resto de las obras de Arquímedes que se nos han conservado.

⟨Definiciones⟩[16]

Si un cono es cortado por un plano que llega a todas las generatrices, la sección será un círculo o una elipse. Si la sección es un círculo, es evidente que el segmento tomado de él hacia el mismo lado que el vértice del cono será un cono. Pero si la sección resulta una elipse, llámese tronco de cono a la figura tomada del cono hacia el mismo lado del vértice del cono, y llámese base del segmento a ⟨la parte del⟩ plano comprendido por la elipse; vértice al punto que sirve también de vértice al cono; eje a la recta trazada desde el vértice del cono hasta el centro de la elipse.

Y si un cilindro es cortado por dos planos paralelos concurrentes con todas las generatrices[17], las secciones serán o bien círculos, o bien elipses iguales y semejantes[18]. Y si las secciones resultantes son círculos, es evidente que la figura tomada del cilindro entre los planos paralelos será un cilindro. Pero si las secciones resultantes son elipses, llámese tronco de cilindro a la figura tomada del cilindro entre los planos paralelos, y llámese base del tronco a ⟨las partes de⟩ los planos comprendidas por las elipses, y eje a la recta que une los centros de las elipses. Éstos estarán en la misma recta que el eje del cilindro.

---

[16] Este subtítulo no figura en los mss. griegos, sino que es añadido por Heiberg en su traducción latina y recogido por otros editores y traductores.

[17] Es decir, «que corten a todas las generatrices».

[18] Es decir, elipses congruentes.

⟨Lema⟩[19]

Si hubiera un número cualquiera de magnitudes que exceden unas a otras en la misma magnitud y el exceso es igual a la más pequeña, y otras magnitudes iguales en número a éstas y cada una es en magnitud igual a la mayor, la suma de todas las magnitudes de las que cada una es igual a la mayor será menor que el doble de la suma de todas las que se excedían en la misma cantidad y mayor que el doble de ellas excepto la mayor[20]. La demostración de esto es evidente[21].

Proposición 1

Si unas magnitudes, en número cualquiera, guardan de dos en dos, las dispuestas de modo semejante, la misma razón que otras magnitudes iguales en número, y se
262 *afirma que las primeras magnitudes guardan respecto a otras magnitudes indicadas, sea todas, sea algunas de ellas, una razón cualquiera, y que las segundas están en esa misma razón con otras magnitudes homólogas, la*

[19] El subtítulo fue añadido por Stamatis.

[20] Es decir, que dada una serie de magnitudes A_1, A_2, A_3, ..., A_n en la que se cumplen los requisitos indicados por Arquímedes para su primera serie, se cumplirá que

$$n \, . \, A_n < 2\,(A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n)$$

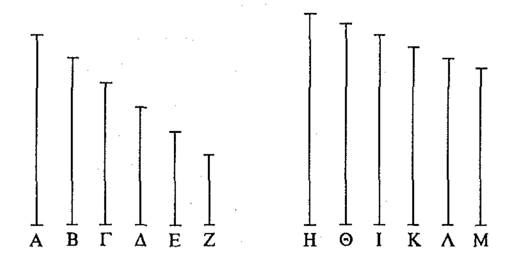
y que

$$n \, . \, A_n > 2\,(A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_{n-1}).$$

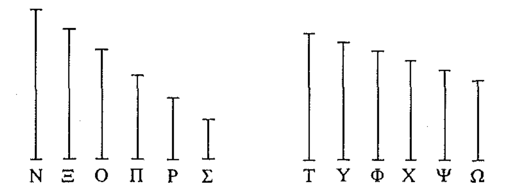
[21] Figura en *Espirales*, 11.

suma de las primeras magnitudes guardará con la suma de las magnitudes indicadas la misma razón que guarda la suma de las segundas magnitudes con la suma de las indicadas.

Sean unas magnitudes A, B, Γ, Δ, E, Z que guardan de dos en dos la misma razón que otras magnitudes iguales en número H, Θ, I, K, Λ, M y guarde A con B la misma razón que H con Θ, y B con Γ la misma razón que Θ con I y las demás del



mismo modo que éstas, y estén las magnitudes A, B, Γ, Δ, E, Z en cualquier razón con otras magnitudes N, Ξ, O, Π, P, Σ, y estén las magnitudes H, Θ, I, K, Λ, M en la misma razón con otras magnitudes correspondientes, T, Y, Φ, X, Ψ, Ω; y guarde H con T la razón que guarda A con N, y guarde Θ con Y la razón que guarda B con Ξ; y las demás, de modo semejante a éstas.



Se ha de demostrar que la suma de A, B, Γ, Δ, E, Z guarda con la suma de N, Ξ, O, Π, P, Σ la misma razón que la suma de H, Θ, I, K, Λ, M con la suma de T, Y, Φ, X, Ψ, Ω.

Puesto que N guarda con A la misma razón que T con H, mientras que A guarda con B la misma razón que H con Θ y B con Ξ la que Θ con Y, N guardará con Ξ la misma razón que T con Y. Por la misma razón también Ξ guardará con O la
264 misma que Y con Φ, y las demás igual que éstas. Y la suma de A, B, Γ, Δ E, Z guarda con A la misma razón que la suma de H, Θ, I, K, Λ, M con H, y A guarda con N la razón de H con T [*Elem.* V 7, corol.], mientras que N guarda con la suma de N, Ξ, O, Π, P, Σ la misma razón que T con la suma de T, Y, Φ, X, Ψ, Ω. Es evidente por tanto, que la suma de A, B, Γ, Δ, E, Z guarda con la suma de N, Ξ, O, Π, P, Σ la misma razón que la suma de H, Θ, I, K, Λ, M con la suma de T, Y, Φ, X, Ψ, Ω[22].

Y es evidente también que si de las magnitudes A, B, Γ, Δ, E, Z, las A, B, Γ, Δ, E guardan razón con las N, Ξ, O, Π, P, pero Z no guarda razón con ninguna otra, y de las magnitudes H, Θ, I, K, Λ, M, las H, Θ, I, K, Λ guardan razón con las T, Y, Φ, X, Ψ, sus correspondientes en la misma razón, pero M no guarda razón con ninguna otra, de modo semejante la suma de A, B, Γ, Δ, E, Z guardará con la suma de N, Ξ, O Π, P la misma razón que la suma de H, Θ, I, K, Λ, M con la suma de T, Y, Φ, X, Ψ.

266

Proposición 2

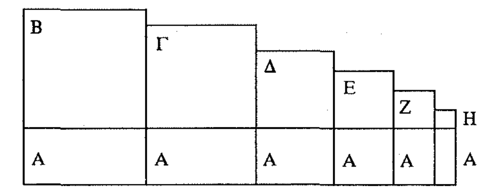
Si unas líneas[23]*, en número cualquiera, son iguales entre sí y a cada una se le aplica un área con un exceso en forma de cuadrado, y si los lados de las áreas excedentes se*

[22] La concisión de estilo es extrema en esta proposición; tanto Heiberg en su edición de Arquímedes (I 263) como Heath *(The Works of Archimedes,* 105-106) ofrecen una amplia exégesis.

[23] «Líneas rectas», se entiende.

exceden entre sí en lo mismo y el exceso es igual al lado menor, y si, por otra parte, hay otras áreas, iguales a éstas en número y cada una en magnitud igual a la mayor[24]*, éstas guardarán con la suma de todas las otras áreas una razón menor que la que guarda la recta igual a la suma del lado del exceso mayor más una de las que son iguales con la recta igual a la suma de la tercera parte del lado del exceso mayor más la mitad de una de las que son iguales, pero guardarán con la suma de las áreas restantes excepto la mayor una razón mayor que esa misma razón.*

Sean, pues, rectas iguales en un número cualquiera, en las que figura A, y téngase aplicada a cada una de ellas un área cuyo exceso tenga forma de cuadrado, y sean B, Γ, Δ, E, Z, H los lados de las figuras excedentes, que se exceden[25] entre sí en lo mismo, y sea el exceso igual al lado menor, y sea B el lado mayor y H el lado menor. Y sean, por otra parte, otras áreas, en las que figura Θ, I, K, Λ, iguales a éstas en



número y cada una en magnitud igual a la mayor —la aplicada a AB— y sea la línea ΘI igual a A, y la KΛ igual a B[26] y sea cada una de las líneas ΘI el doble de I, y cada una de las KΛ el triple de K.

[24] «De las áreas mencionadas al principio», se entiende.

[25] «Los lados», se entiende.

[26] Es decir, «Sea la línea suma de Θ, I igual a A y la línea suma de K, Λ igual a B».

268 Se ha de demostrar que la suma de todas las áreas en las que figura Θ, I, K, Λ guarda con la suma de todas las áreas AB, AΓ, AΔ, AE, AZ, AH una razón menor que la que guarda la recta ΘIKΛ con la recta IK, y una razón mayor que ésa con la suma de las demás[27] excepto la mayor AB.

Λ		Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ
K		K	K	K	K	K	K
I		I	I	I	I	I	I
Θ		Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ

Hay unas áreas, en las que figura A, que exceden unas de otras en lo mismo, y el exceso es igual a la menor[28] y otras áreas, en las que figura Θ, I, iguales en número a éstas, cada una en magnitud igual a la mayor. Así, la suma de todas las áreas en las que figura Θ, I es menor que el doble de la suma de todas aquellas en las que figura A, mientras que la suma de las restantes sin la mayor[29] es mayor que el doble[30]. La suma de las áreas en las que figura I es menor que la suma de aquéllas en las que figura A, pero mayor que la suma de las restantes sin la mayor.

De nuevo, hay ciertas líneas B, Γ, Δ, E, Z, H que se exceden entre sí en lo mismo y el exceso es igual a la menor, y otras líneas, en las que figura K, Λ, iguales en número a éstas y cada una de ellas igual en magnitud a la mayor.

Entonces, la suma de los cuadrados construidos sobre todas las que son iguales entre sí y a la mayor es menor que el triple de la suma de los cuadrados construidos sobre las

[27] «Áreas», se entiende.

[28] [*Puesto que las superficies en que exceden y las anchuras exceden en lo mismo*].

[29] Entiéndase: «la suma de las restantes áreas en las que figura A, excepto la mayor».

[30] Cf. Lema 260, 17.

que se exceden entre sí en lo mismo, pero mayor que el triple de ⟨la suma de los cuadrados construidos sobre⟩ las restantes sin contar el cuadrado construido sobre la mayor. Es- 270
to se ha demostrado en los libros publicados *Sobre las espirales*[31]. La suma de las áreas en las que figura K es menor que la suma de todas las áreas en las que figura B, Γ, Δ, E, Z, H, pero mayor que la suma de aquellas en las que figura Γ, Δ, E, Z, H. De manera que también la suma de las áreas en las que figura I, K es menor que la suma de aquéllas en las que figura AB, AΓ, AΔ, AE, AZ, AH, pero mayor que la suma de aquéllas en las que figura AΓ, AΔ, AE, AZ, AH.

Por tanto es evidente que la suma de todas las áreas en las que figura Θ, I, K, A guarda con las áreas en las que figura AB, AΓ, AΔ, AE, AZ, AH una razón menor que la que guarda ΘΛ con IK, pero mayor que esa misma razón con las áreas restantes sin contar AB.

PROPOSICIÓN 3

Si unas rectas trazadas desde el mismo punto[32] *son tangentes a cualquier sección cónica, y en el interior de la sección cónica hay otras rectas trazadas paralelas a las tangentes y que se cortan entre sí, los rectángulos comprendidos por los segmentos guardarán entre sí la misma razón que los cuadrados construidos sobre las tangentes. Y la figura comprendida por los segmentos de una de las líneas será homóloga del cuadrado construido sobre la tangente paralela a ella.*

[31] *Sobre las espirales*, prop. 10.

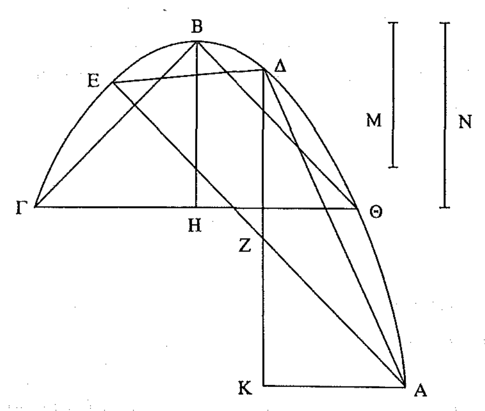
[32] «Exterior a la cónica», se entiende.

Esto está demostrado en los *Elementos de las cónicas*[33].

* * *

25 272 *Si de la misma parábola se cortan de cualquier manera dos segmentos que tengan diámetros iguales, serán iguales los propios segmentos y los triángulos inscritos en ellos que tengan la misma base que los segmentos y la misma altura.* (Llamo diámetro en cualquier segmento a la recta que corta por la mitad todas las rectas trazadas paralelas a su base.)

Sea ΑΒΓ una parábola, y córtense de ella dos segmentos ΑΔΕ y ΘΒΓ y sea ΔΖ el diámetro de ΑΔΕ y ΒΗ el de ΘΒΓ, y sean iguales ΔΖ, ΒΗ.



Se ha de demostrar que los segmentos ΑΔΕ, ΘΒΓ y los triángulos inscritos en ellos del modo indicado son iguales.

Sea primero la recta ΘΓ, que corta uno de los segmentos, perpendicular al diámetro de la parábola, y tómese el pará-

[33] Se suele interpretar que Arquímedes se refiere a la obra de Euclides del mismo título (perdida). La demostración figura también en Apolonio de Perga, *Cónicas* III 27.

metro[34] —el doble de la recta que llega hasta el eje[35]— y sea en la que figura M, y desde el punto A trácese AK perpendicular a ΔZ. Puesto que ΔZ es el diámetro del segmento y AE está cortada por la mitad en Z, también ΔZ es paralela al diámetro de la parábola. Por tanto, corta por la mitad a todas las rectas trazadas paralelas a AE. Guarde N con M la razón que guarda el cuadrado de lado AZ con el cuadrado de lado AK. Los cuadrados de las rectas trazadas desde la parábola hasta ΔZ paralelas a AE equivalen a los rectángulos ⟨que se 274
obtienen⟩ aplicando a una recta igual a N como ancho ⟨los segmentos⟩ que ellas mismas determinan en ΔZ hasta el punto Δ como extremo, pues eso está demostrado en las *Cónicas*[36]. Entonces, el cuadrado de lado AZ equivale a un rectángulo igual al comprendido por N y ΔZ. Y también el cuadrado de lado ΘH equivale a un rectángulo igual al comprendido por M y BH, puesto que ΘH es perpendicular al diámetro [*Cón.* I 11]. Entonces el cuadrado de lado AZ guardaría con el cuadrado de lado ΘH la misma razón que N con M, puesto que se había supuesto que ΔZ, BH eran iguales. Y el cuadrado de lado AZ guarda también con el cuadrado de lado AK la misma razón que N con M; por tanto ΘH, AK son iguales [*Elem.* V 9]. Y también son iguales BH, ΔZ; luego también el rectángulo comprendido por ΘH, BH es igual al comprendido por AK, ΔZ. De manera que también el triángulo ΘHB es igual al triángulo AΔZ. De modo que también lo son sus dobles. Y el segmento AΔE es cuatro tercios del

[34] Cf. el apartado relativo a terminología en la Introducción, págs. 47-48.

[35] Entiéndase: «el doble de la recta que llega ⟨desde el vértice de la parábola⟩ hasta el eje ⟨del cono⟩». Lo que Arquímedes pide en esta frase es la consideración de los elementos de la ecuación $y^2 = 2px$ de la parábola en cuestión.

[36] Para Heiberg, esta mención de las *Cónicas* se refiere a las de Euclides.

triángulo AΔE[37], y el segmento ΘBΓ es cuatro tercios del triángulo ΘBΓ.

Luego es evidente que son iguales los segmentos y los triángulos inscritos en ellos.

Y si ninguna de las rectas que cortan los segmentos es perpendicular al diámetro de la parábola, si se toma del diámetro de la parábola una recta igual al diámetro de un segmento y desde el extremo de la recta tomada se traza una recta perpendicular al diámetro, el segmento resultante será igual a cada uno de los segmentos.

Luego es evidente lo propuesto.

276 PROPOSICIÓN 4

Toda área comprendida por una elipse guarda con el círculo de diámetro igual al diámetro mayor de la elipse la misma razón que su diámetro menor con el mayor o con el diámetro del círculo.

Sea, pues, una elipse, en la que figuran A, B, Γ, Δ, y sea su diámetro mayor en el que figuran A, Γ y su diámetro menor en el que figuran B, Δ y sea un círculo de diámetro AΓ.

Se ha de demostrar que el área comprendida por la elipse guarda con el círculo la misma razón que BΔ con ΓA, es decir, con EZ.

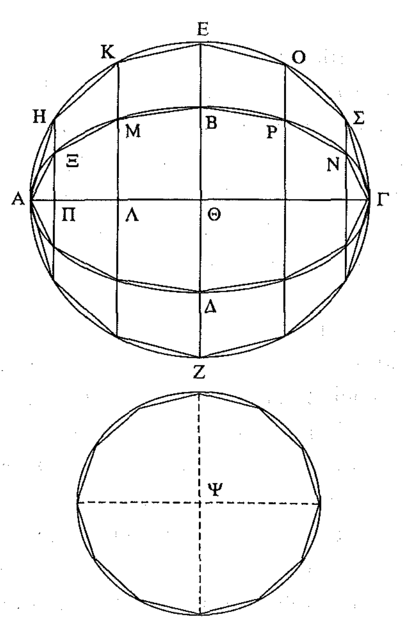
Guarde el círculo en el que figura Ψ con el círculo AEΓZ la misma razón que BΔ con EZ.

Digo que el círculo Ψ es igual a la elipse.

Pues si el círculo Ψ no es igual al área comprendida por la elipse, sea primero, si es posible, mayor.

[37] Cf. *Cuadratura de la parábola* 17 y 24.

Es posible inscribir en el círculo Ψ un polígono[38] de número par de ángulos mayor que el área ABΓΔ. Considérese inscrito, e incríbase en el círculo AEΓZ una figura rectilínea semejante a la inscrita en el círculo Ψ, y desde sus ángulos[39] trácense perpendiculares al diámetro AΓ, y trácense rectas
que unan los puntos en los que las perpendiculares cortan a 278
la elipse.



Entonces, habrá una figura rectilínea inscrita en la elipse, y guardará con la figura rectilínea inscrita en el círculo AEΓZ la misma razón que BΔ con EZ. Puesto que EΘ, KΛ son perpendiculares cortadas en la misma razón por los puntos M, B, es evidente que el trapecio ΛE guarda con el ΘM la

[38] «Equilátero» o «regular», se sobreentiende.

[39] Es decir, «desde los vértices de sus ángulos».

misma razón que ΘE con BΘ. Por la misma razón, también cada uno de los otros trapecios que hay en el círculo guarda con cada uno de los trapecios que hay en la elipse la misma razón que EΘ con BΘ. Y también los triángulos situados en A, Γ en el círculo guardan esa misma razón con los situados[40] en la elipse. Por tanto también toda la figura rectilínea inscrita en el círculo AEΓZ guardará con toda la figura rectilínea inscrita en la elipse la misma razón que EZ con BΔ. La misma figura rectilínea guarda también con la inscrita en el círculo Ψ la misma razón, puesto que también los círculos guardaban esa razón [*Elem.* V 16]. Luego la figura rectilínea inscrita en el círculo Ψ es igual a la figura rectilínea inscrita en la elipse [*Elem.* V 9]. Lo cual es imposible, pues era mayor que el área entera comprendida por la elipse.

Pero sea, si es posible, menor.

280 De nuevo es posible inscribir en la elipse un polígono de un número par de lados mayor que el círculo Ψ. Inscríbase, pues, y trazadas desde sus ángulos[41] perpendiculares a AΓ, prolónguense hacia la circunferencia del círculo.

De nuevo habrá en el círculo AE una figura rectilínea inscrita que guardará con la figura inscrita en la elipse la misma razón que EZ con BΔ. Una vez inscrita también en el círculo Ψ una figura semejante a ella, se demostrará que la figura inscrita en el círculo Ψ es igual a la inscrita en la elipse, lo cual es imposible. Por consiguiente, el círculo Ψ tampoco es menor que el área comprendida por la elipse.

Así que es evidente que el área indicada guarda con el círculo AEΓZ la misma razón que BΔ con EZ.

[40] Entiéndase «situados del mismo modo».

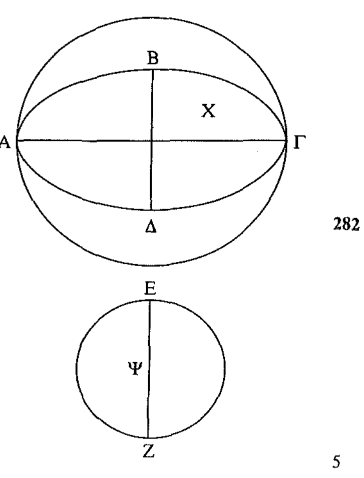
[41] Es decir, «desde los vértices de sus ángulos».

PROPOSICIÓN 5

Toda área contenida por una elipse guarda con todo círculo la misma razón que el rectángulo comprendido por los diámetros de la elipse con el cuadrado construido sobre el diámetro del círculo.

Sea un área comprendida por una elipse, en la que figura X, y sean los diámetros de la elipse AΓ, BΔ, y sea AΓ el mayor, y sea un círculo, en el que figura Ψ, y sea su diámetro EZ.

Se ha de demostrar que el área X guarda con el círculo Ψ la misma razón que el rectángulo comprendido por AΓ, BΔ con el cuadrado de lado EZ.



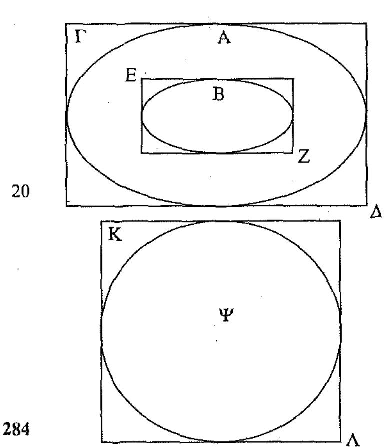
Circunscríbase un círculo **282**
al diámetro AΓ; el área X guarda con el círculo cuyo diámetro es AΓ la misma razón que el rectángulo comprendido por AΓ, BΔ con el cuadrado de lado AΓ, pues se ha demostrado que guarda la razón de BΔ a AΓ [Prop. 4]. Y el círculo cuyo diámetro es AΓ guarda con el círculo cuyo diámetro es EZ la misma razón que el cuadrado de lado AΓ con el cuadrado de lado EZ [*Elem.* XII 2].

Por tanto, es evidente que el área X guarda con el círculo Ψ la misma razón que el rectángulo comprendido por AΓ, BΔ con el cuadrado de lado EZ [*Elem.* V 22].

Proposición 6

Las áreas comprendidas por elipses guardan entre sí la misma razón que la que guardan entre sí los rectángulos comprendidos por los diámetros de las elipses.

Sean áreas comprendidas por elipses aquéllas en las que figura A, B y sea ΓΔ el rectángulo comprendido por los diámetros de la elipse que comprende el área A, y EZ el comprendido por los diámetros de la otra elipse.



Se ha de demostrar que el área A guarda con el área B la misma razón que ΓΔ con EZ.

Tómese un círculo, en el que figura Ψ, y sea KΛ el cuadrado construido sobre su diámetro.

Entonces el área A guarda con el círculo Ψ la misma razón que ΓΔ con KΛ [Prop. 5], y el círculo Ψ
284 guarda con el área B la misma razón que KΛ con EZ [Prop. 5; *Elem.* V 16].

Por tanto, es evidente que el área A guarda con el área B la misma razón que ΓΔ con EZ [*Elem.* V 22].

Corolario

A partir de esto es evidente que las áreas comprendidas por elipses semejantes guardan entre sí la misma razón que

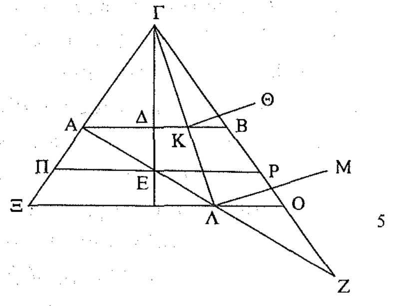
guardan los cuadrados construidos sobre sus diámetros homólogos.

Proposición 7

Dada una elipse y alzada desde el centro de la elipse una línea perpendicular al plano en que está la elipse, es posible hallar un cono que tenga por vértice el extremo de la recta alzada en cuya superficie esté situada la elipse dada.

Sea dada una elipse y, alzada desde su centro, una línea recta perpendicular al plano en que está la elipse; y trácese un plano que pase por la recta alzada y por el diámetro menor, y estén en él el diámetro menor, AB, el centro de la elipse, Δ, y la recta ΓΔ alzada desde el centro y su extremo Γ, y considérese que la elipse descrita en torno al diámetro AB está en un plano perpendicular a ΓΔ. 286

Hay que hallar un cono que tenga por vértice el punto Γ, en cuya superficie esté situada la elipse.



Prolónguense las rectas trazadas desde Γ hasta A, B, y desde A trácese AZ de manera que el rectángulo comprendido por AE, EZ guarde con el cuadrado de lado EΓ la razón que guarda el cuadrado construido sobre la mitad del diámetro mayor con el cuadrado de lado ΔΓ —es posible, puesto que la razón es mayor que la que guarda el rectángulo comprendido por AΔ,

ΔΒ con el cuadrado de ΔΓ[42]—; a partir de la recta ΑΖ constrúyase un plano perpendicular al plano en el que están ΑΓ, ΑΖ y en ese plano trácese un círculo de diámetro ΑΖ, y sobre ese círculo sea un cono que tenga por vértice el punto Γ.

Se demostrará que la elipse está en la superficie de ese cono.

Pues si no está en la superficie del cono, es necesario que en la elipse haya un punto que no esté en la superficie del cono.

Considérese tomado en la elipse un punto Θ que no está en la superficie del cono, y desde Θ trácese ΘΚ perpendicular a ΑΒ. Ésta será perpendicular al plano en el que están ΑΓ, ΓΖ [*Elem.* XI, def. 4]. Prolónguese la recta trazada desde Γ has-
288 ta Κ; corte ésta a la recta ΑΖ en el punto Λ, y desde Λ trácese ΛΜ perpendicular a ΖΑ en el círculo de diámetro ΑΖ, y sobre su circunferencia considérese un punto Μ elevado, y trácense también por el punto Λ la recta ΞΟ y por el punto Ε la recta ΠΡ, paralelas a ΑΒ.

Puesto que el rectángulo comprendido por ΕΑ, ΕΖ guarda con el cuadrado de lado ΕΓ la misma razón que el cuadrado construido sobre la mitad del diámetro mayor con el cuadrado de lado ΔΓ [por hipót.], mientras que el cuadrado de lado ΕΓ guarda con el rectángulo comprendido por ΕΠ, ΕΡ la misma razón que el cuadrado de lado ΔΓ con el rectángulo comprendido por ΑΔ, ΔΒ, ⟨entonces⟩ el rectángulo ΑΕ, ΕΖ guarda con el rectángulo ΠΕ, ΕΡ la misma razón que el cuadrado construido sobre la mitad del diámetro mayor con el rectángulo ΑΔ, ΔΒ [*Elem.* V 22]. Y el rectángulo ΑΕ, ΕΖ es al rectángulo ΕΠ, ΕΡ como el rectángulo ΑΛ, ΛΖ al rectángulo ΛΞ, ΛΟ, y el cuadrado de la mitad del diámetro mayor es al

[42] La veracidad de esta condición fue demostrada por Nizze; cf. Zeuthen, *Die Lehre des Kegelschnitten im Altertum,* págs. 411 y ss. (nota de Heiberg).

rectángulo AΔ, ΔB como el cuadrado de lado ΘK al rectángulo AK, KB [Cón. I 21]; por tanto el rectángulo AΛ, ΛZ guarda con el rectángulo ΞΛ, ΛO la misma razón que el cuadrado de lado ΘK con el rectángulo AK, KB. Y el rectángulo ΞΛ, ΛO también guarda con el cuadrado de lado ΓΛ la misma razón que el rectángulo AK, KB con el cuadrado de lado KΓ. Luego también el rectángulo AΛ, ΛZ guarda con el cuadrado de lado ΓΛ la misma razón que el cuadrado de lado ΘK con el cuadrado de lado KΓ [*Elem.* V 22]. Y el cuadrado de lado ΛM es igual al rectángulo AΛ, ΛZ —pues ΛM se trazó perpendicular en el semicírculo de diámetro AZ—, luego el cuadrado de lado ΛM guarda con el cuadrado de lado ΛΓ la misma razón que el cuadrado de lado ΘK con el cuadrado de lado KΓ. De manera que los puntos Γ, Θ, M están en línea recta. Y la recta ΓM está en la superficie del cono [*Cón.* I 1]. Luego es evidente que también el punto Θ estará en la superficie del cono. Y habíamos supuesto que no estaba.

Luego no hay ningún punto en la elipse que no esté en la superficie del cono antedicho.

Luego toda la elipse está en la superficie del mismo cono.

Proposición 8

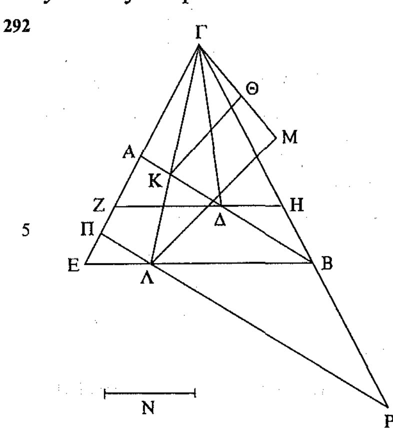
Dada una elipse y una línea[43], *alzada desde el centro de la elipse, que no sea perpendicular en un plano que ha sido construido ⟨pasando⟩ por un diámetro y perpendicular al plano en que está la elipse, es posible hallar un cono que*

[43] Sobreentiéndase «recta». Aunque no es demasiado frecuente, tampoco es excepcional, en contextos inequívocos, el uso del término *grammā́*, «línea» en lugar de *eutheîa,* «recta».

tenga por vértice el extremo de la recta alzada y en cuya superficie esté la elipse dada.

Sea BA un diámetro de la elipse y Δ su centro, y esté alzada desde el centro la recta ΔΓ según se ha dicho, y considérese la elipse de diámetro AB en un plano perpendicular al plano en que están AB, ΓΔ.

Hay que hallar un cono que tenga por vértice el punto Γ y en cuya superficie se encuentre la elipse.



292 Las rectas AΓ, ΓB no son iguales, puesto que ΓΔ no es perpendicular al plano en el que está la elipse. Sea EΓ igual a ΓB, y sea la recta N igual a la mitad del otro diámetro, cuyo conjugado[44] es AB, y por el punto Δ trácese ZH paralela a EB, y a partir de EB constrúyase un plano perpendicular al plano en el que están AΓ, ΓB y en ese plano trácese un círculo de diámetro EB si el cuadrado de lado N es igual al rectángulo comprendido por ZΔ, ΔH; y si no es igual, trácese una elipse tal que el cuadrado que tenga por lado un diámetro guarde con el cuadrado de lado EB la misma razón que guarda el cuadrado de lado N con el rectángulo comprendido por ZΔ, ΔH. Y tómese un cono que tenga por vértice el punto Γ en cuya superficie estarán el círculo o la elipse
294 de diámetro EB. Eso es posible, puesto que la recta trazada

[44] Apolonio, *Cónicas* I, def. 6: «Llamo diámetros conjugados de una línea curva y de dos líneas curvas a las rectas cada una de las cuales, siendo un diámetro, corta por la mitad a las paralelas a la otra».

desde Γ hasta el punto medio de ΕΒ es perpendicular al plano que pasa por ΕΒ.

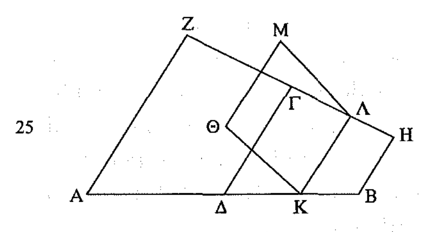
La elipse de diámetro ΑΒ está también en esta superficie. Pues si no está en ella, habrá un punto en la elipse que no estará en la superficie del cono. Considérese tomado un punto Θ que no está en la superficie del cono, y desde Θ trácese ΘΚ perpendicular a ΑΒ, y una vez trazada ΓΚ prolónguese y corte a ΕΒ en el punto Λ, y por el punto Λ trácese en el plano perpendicular correspondiente a ΕΒ la recta ΛΜ perpendicular a ΕΒ, y considérese el punto Μ elevado en la superficie del cono, y por el punto Α trácese ΠΡ paralela a ΑΒ. Entonces el cuadrado de lado Ν es al rectángulo comprendido por ΖΔ, ΔΗ como el cuadrado de lado ΛΜ es al rectángulo ΕΛ, ΛΒ, y el rectángulo ΖΔ, ΔΗ es al rectángulo ΑΔ, ΔΒ como el rectángulo ΕΛ, ΛΒ es al rectángulo ΠΛ, ΛΡ. Por tanto, el cuadrado de lado Ν será al rectángulo comprendido por ΑΔ, ΔΒ como el cuadrado de lado ΛΜ es al rectángulo ΠΛ, ΛΡ [*Elem.* V 22]. Y el cuadrado de lado Ν es al rectángulo comprendido por ΑΔ, ΔΒ como el cuadrado de lado ΘΚ es al rectángulo ΑΚ, ΚΒ, puesto que han sido trazadas perpendiculares al diámetro ΑΒ en la misma elipse [*Cón.* I 21]. Luego el cuadrado de lado ΛΜ guarda con el rectángulo ΠΛ, ΛΡ la misma razón que el cuadrado de lado ΘΚ con el rectángulo ΑΚ, ΚΒ. Y también el rectángulo comprendido por ΠΛ, ΛΡ guarda con el cuadrado de lado ΓΛ la misma razón que el 296
rectángulo ΑΚ, ΚΒ con el cuadrado de lado ΚΓ. Por tanto, el cuadrado de lado ΛΜ guarda con el cuadrado de lado ΑΓ la misma razón que el cuadrado de lado ΘΚ con el cuadrado de lado ΚΓ [*Elem.* V 22]. De modo que los puntos Γ, Θ, Μ están en línea recta. Y la recta ΓΜ está en la superficie del cono [*Cón.* I 1]. Luego es evidente que también el punto Θ está en la superficie del cono; y se había supuesto que no estaba.

Luego es evidente lo que había que demostrar.

Proposición 9

Dada una elipse y una línea[45]*, levantada desde el centro de la elipse sin ser perpendicular en un plano que desde uno de los diámetros se alza perpendicular al plano en el que está la elipse, es posible hallar un cilindro que tenga su eje en línea recta con la línea alzada y en cuya superficie esté la elipse dada.*

Sea ΒΑ un diámetro de la elipse dada y Δ su centro y sea ΓΔ la línea alzada desde el centro como se ha indicado, y considérese la elipse de diámetro ΑΒ en un plano perpendicular al plano en el que están ΑΒ, ΓΔ.



Es preciso hallar un cilindro que tenga su eje en línea recta con ΓΔ y en cuya superficie esté la elipse dada.

Trácense ΑΖ, ΒΗ desde los puntos Α, Β parale-
298 las a ΓΔ. Entonces el otro diámetro de la elipse o bien es igual a la distancia entre ΑΖ, ΒΗ o es mayor o es menor.

Sea en primer lugar igual a ΖΗ, y sea ΖΗ perpendicular a ΓΔ, y a partir de ΖΗ constrúyase un plano perpendicular a ΓΔ, y en ese plano sea un círculo de diámetro ΖΗ, y a partir de ese círculo sea un cilindro que tenga por eje ΓΔ.

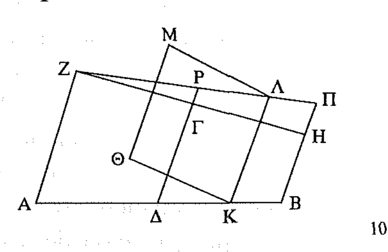
La elipse está en la superficie de ese cilindro.

Pues si no está, habrá un punto en la elipse que no esté en la superficie del cilindro. Considérese tomado en la elipse un punto Θ que no está en la superficie del cilindro, y

[45] «Recta», se entiende.

desde Θ trácese ΘK perpendicular a AB; ésta será perpendicular al plano en el que están AB, ΓΔ [*Elem.* XI, def. 4]; y desde K trácese KΛ paralela a ΓΔ, y desde Λ constrúyase la recta ΛM perpendicular a ZH en el círculo de diámetro ZH, y considérese el punto M elevado en el arco del semicírculo de diámetro ZH. El cuadrado construido sobre la perpendicular ΘK guarda con el rectángulo comprendido por AK, KB la misma razón que el cuadrado de lado ZΓ con el rectángulo comprendido por AΔ, ΔB, puesto que ZH es igual al otro diámetro. El rectángulo comprendido por ZΛ, ΛH guarda con el comprendido por AK, KB la misma razón que el cuadrado de lado ZΓ con el cuadrado de lado AΔ. Por tanto, el rectángulo comprendido por ZΛ, ΛH es igual al cuadrado de lado ΘK. Y también es igual al cuadrado de lado ΛM. Luego las perpendiculares ΘK, MΛ son iguales. Luego ΛK, MΘ son paralelas [*Elem.* I 33]. De modo que también ΔΓ, MΘ serán paralelas [*Elem.* XI 9]. Y por tanto ΘM está en la superficie del cilindro, puesto que ha sido trazada paralela al eje desde el punto M, que está en la superficie. Luego es evidente que también Θ está en su superficie. Y se había supuesto que no estaba. Luego es evidente lo que había que demostrar.

Y es evidente también que el cilindro que la[46] contiene será recto si un diámetro[47] es igual a la distancia entre las rectas trazadas desde los extremos del otro diámetro paralelas a la recta alzada.



Sea ahora un diámetro mayor que ZH y sea ΠZ igual al otro diámetro, y desde ΠZ constrúyase un plano perpendicu-

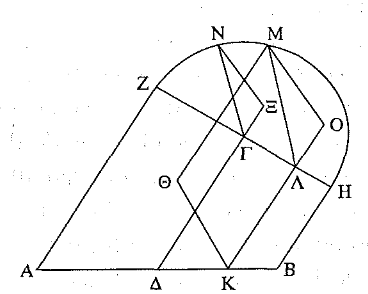
[46] «A la elipse», se entiende.

[47] «De la elipse», se entiende.

lar al plano en el que están AB, ΓΔ, y sea en ese plano un círculo de diámetro ΠZ, y a partir de ese círculo sea un cilindro que tenga por eje ΔP.

Por los mismos razonamientos se demostrará que la elipse está en la superficie de ese cilindro.

Sea ahora un diámetro menor que ZH.



Sea el cuadrado de lado ΓΞ igual a la diferencia en que es mayor el cuadrado de lado ZΓ que el cuadrado construido sobre la mitad de un diámetro, y desde el punto Ξ álcese una línea igual a la mitad del otro diámetro y perpendicular al plano en el que están AB, ΓΔ, la línea ΞN, y
302 considérese el punto N elevado; entonces ΓN es igual a ΓZ. En el plano en que están ZH, ΓN trácese un círculo de diámetro ZH. Éste pasará por el punto N. Y sobre el círculo sea un cilindro de eje ΓΔ.

La elipse está en la superficie de ese cilindro.

Pues si no está, habrá un punto en ella que no esté en la superficie del cilindro. Tómese en ella un punto Θ y trácese ΘK perpendicular a AB, y desde K sea KΛ paralela a ΓΔ, y desde Λ trácese ΛM perpendicular a ZH en el semicírculo de diámetro ZH, y considérese M en la semicircunferencia del semicírculo de diámetro ZH, y desde M trácese MO perpendicular a la prolongación de KΛ. Ésta será perpendicular al plano en el que están AB, ΓΔ, puesto que KΛ es perpendicular a ZH. Entonces el cuadrado de lado MO es al cuadrado de lado MΛ como el cuadrado de lado ΞN es al cuadrado de lado NΓ; y el cuadrado de lado MΛ es al rectángulo AK, KB como

el cuadrado de lado ΓΝ es al cuadrado de lado ΑΔ, puesto que el cuadrado de lado ΜΛ es igual al rectángulo comprendido por ΛΖ, ΛΗ, mientras que el cuadrado de lado ΓΝ es igual al cuadrado de lado ΓΖ. Luego el cuadrado de lado ΜΟ es al rectángulo ΑΚ, ΚΒ como el cuadrado de lado ΞΝ es al cuadrado de lado ΑΔ [*Elem.* V 22]. Y el cuadrado de lado ΚΘ es al rectángulo ΑΚ, ΚΒ como el cuadrado de lado ΞΝ es 304
al cuadrado de lado ΑΔ [*Cón.* I 21], puesto que la recta ΞΝ es igual a la mitad del otro diámetro [por const.]. Por tanto es evidente que las perpendiculares ΜΟ, ΘΚ son iguales. De modo que ΚΟ, ΘΜ son paralelas [*Elem.* I 33]. Puesto que ΜΘ es paralela al eje del cilindro y el punto Μ está en su superficie, es de necesidad que también ΜΘ esté en la superficie del cilindro. Luego es evidente que también Θ está en su superficie. Pero no estaba [por hipót.].

Luego está claro que es de necesidad que la elipse esté en la superficie del cilindro.

Proposición 10

Que todo cono guarda con otro cono la razón compuesta de la razón de las bases y la de las alturas ha sido ya demostrado por nuestros predecesores[48]*; la misma demostración se aplica a que todo tronco de cono guarda con todo tronco de cono la razón compuesta de la razón de las bases y la de las alturas.*

* * *

[48] Estos resultados, que se siguen de *Elem.* XII 11 y 14, son mencionados por Arquímedes también en *Esf. y cil.* I, Lema, 72, 25.

Y ⟨para la afirmación de⟩ que todo tronco de cilindro es el triple del tronco de cono que tiene la misma base que el tronco de cilindro y la misma altura, la misma demostración que ⟨para la afirmación de que⟩ un cilindro es el triple del cono que tiene la misma base que el cilindro y su misma altura[49].

306 Proposición 11

Si un paraboloide es cortado por un plano que pase por el eje o sea paralelo al eje, la sección será una parábola, la misma ⟨parábola⟩ que comprende la figura[50]*, y su diámetro será la sección común entre el plano secante de la figura y el plano trazado pasando por el eje perpendicular al plano secante.*

Y si es cortado por un plano perpendicular al eje, la sección será un círculo que tenga su centro en el eje.

* * *

Si un hiperboloide es cortado por un plano que pase por el eje o sea paralelo al eje o pase por el vértice del cono que contiene al hiperboloide, la sección será una hipérbola; si pasa por el eje, será la propia ⟨hipérbola⟩ que comprende la figura[51]*; si es paralelo al eje, será semejante a ella, y si pasa por el vértice del cono que comprende al hiperboloide, entonces no será semejante, pero el diámetro de la sección*

[49] Cf. *Elem.* XII 10. En la Carta-dedicatoria a Dosíteo que precede a *Esf. y cil.* (4, 2 y ss.) Arquímedes atribuye a Eudoxo las demostraciones que menciona.

[50] Es decir, «será igual a la parábola que genera el paraboloide».

[51] Es decir, «será igual a la hipérbola que genera el hiperboloide».

será la sección común entre el plano secante de la figura y el plano trazado por el eje perpendicular al plano secante.

Si es cortado por un plano perpendicular al eje, la sección será un círculo que tenga el centro en el eje.

* * *

Si cualquiera de las dos figuras elipsoides[52] *es cortada por un plano que pase por el eje o sea paralelo al eje, la sección será una elipse; si pasa por el eje, será la propia ⟨elipse⟩ que comprende la figura*[53]*; si es paralela al eje, ⟨una⟩ semejante a ella; y el diámetro de la sección será la sección común entre el plano que corta la figura y el plano* 308 *trazado por el eje perpendicular al plano secante.*

Y si es cortada por un plano perpendicular al eje, la sección será un círculo que tenga su centro en el eje.

* * *

Y si cualquiera de las figuras mencionadas es cortada por un plano que pase por el eje, las perpendiculares al plano secante trazadas desde los puntos que están en la superficie de la figura pero no en la sección caerán dentro de la sección de la figura.

Las demostraciones de todas estas cosas son evidentes[54].

---

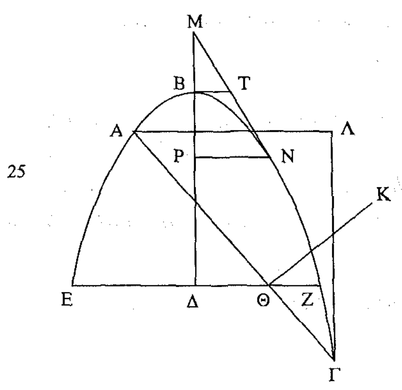
[52] O sea, cualquiera de los dos tipos «alargados» y «aplastados» que mencionaba y definía en la carta a Dosíteo (252, 14 y ss.).

[53] Como en los casos anteriores, «será igual a la elipse que genera el elipsoide».

[54] Torelli, Comandino y otros comentaristas redactaron algunas de estas demostraciones.

Proposición 12

Si un paraboloide es cortado por un plano que ni pase por el eje ni sea paralelo al eje ni sea perpendicular al eje, la sección será una elipse, y su diámetro mayor será la recta comprendida en el interior del paraboloide en la intersección resultante entre el plano que corta la figura y el plano trazado por el eje perpendicular al plano secante, y el diámetro menor será igual a la distancia entre las rectas trazadas paralelas al eje[55] *desde los extremos del diámetro mayor.*



Córtese el paraboloide por un plano según se ha dicho, y una vez cortado por otro plano que pase por el eje y sea perpendicular al plano secante, sea ABΓ la sección del paraboloide, y la recta ΓA la ⟨intersección⟩ con el plano que corta la figura[56], y sea BΔ el eje del paraboloide y diámetro de la sección [Prop. 11].

Se ha de demostrar que la sección del paraboloide producida por el plano correspondiente a AΓ es una elipse, y que AΓ es su diámetro mayor y que su diámetro menor es

[55] Al eje «del segmento», se entiende.

[56] Entiéndase: «la intersección del plano que corta la figura con el que le es perpendicular y pasa por el eje del paraboloide».

igual a ΛΑ, siendo ΓΛ paralela a ΒΔ y siendo ΑΛ perpendicular a ΓΛ.

Considérese tomado un punto Κ en la sección, y desde Κ trácese ΚΘ perpendicular a ΓΑ; entonces ΚΘ será perpendicular al plano en el que está la parábola ΑΓΒ, puesto que también el plano secante es perpendicular a ese mismo plano [*Elem.* XI, def. 4]. Por el punto Θ trácese ΕΖ que forme ángulos rectos con ΒΔ, y trácese un plano que pase por las rectas ΕΖ, ΚΘ; éste será perpendicular a ΒΔ; la figura paraboloide habrá sido cortada por un plano perpendicular al eje, de modo que la sección será un círculo, y su centro será Δ [Prop. 11]. Luego el cuadrado de lado ΚΘ será igual al rectángulo comprendido por ΖΘ, ΘΕ[57]. Trácese tangente a la sección cónica[58] la recta ΜΝ paralela a ΑΓ, y sea tangente en el punto Ν, y trácese ΒΤ paralela a ΕΖ. El rectángulo comprendido por ΑΘ, ΘΓ guarda con el comprendido por ΕΘ, ΘΖ la misma razón que el cuadrado de lado ΝΤ con el cuadrado de lado ΒΤ: eso ya se ha demostrado [Prop. 3]. La recta ΤΜ es igual a la recta ΝΤ, puesto que ΒΡ es igual a ΒΜ. Por tanto, el rectángulo comprendido por ΑΘ, ΘΓ guarda con el cuadrado de lado ΚΘ la misma razón que el cuadrado de lado ΤΜ con el cuadrado de lado ΤΒ. De manera que el cuadrado que tiene por lado la perpendicular ΘΚ guarda con el rectángulo comprendido por ΑΘ, ΘΓ la misma razón que el cuadra- 312
do de lado ΒΤ con el cuadrado de lado ΤΜ [*Elem.* V 7, corol.]. Así, puesto que los triángulos ΓΑΛ, ΤΜΒ son semejantes, el cuadrado que tiene por lado la perpendicular ΘΚ guarda con el rectángulo comprendido por ΑΘ, ΘΓ la mis-

[57] [*Puesto que en el semicírculo correspondiente a ΕΖ la recta ΚΘ, que es perpendicular, es media proporcional del rectángulo comprendido por ΕΘ, ΘΖ*].

[58] Se refiere a la parábola ΑΒΓ.

ma razón que el cuadrado de lado ΑΛ con el cuadrado de lado ΑΓ.

Del mismo modo demostraremos también que los cuadrados que tienen por lado las demás perpendiculares trazadas desde la sección hasta ΑΓ guardan con los rectángulos comprendidos por los segmentos de ΑΓ la misma razón que el cuadrado de lado ΑΛ con el cuadrado de lado ΑΓ.

Por tanto, es evidente que la sección es una elipse, y que sus diámetros son el mayor ΑΓ y el menor igual a ΑΛ [*Cón.* I 21].

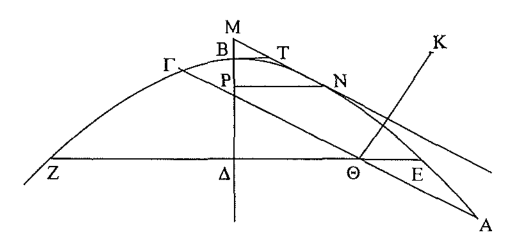
Proposición 13

Si un hiperboloide de revolución es cortado por un plano concurrente con todas las generatrices del cono que contiene al hiperboloide sin ser perpendicular a su eje, la sección será una elipse y su diámetro mayor será la recta comprendida en el interior del hiperboloide en la intersección resultante entre el plano que corta la figura y el plano trazado por el eje perpendicular al plano secante.

Córtese el hiperboloide por un plano según se ha dicho, y cortado éste por otro plano que pase por el eje y perpendicular al plano secante del hiperboloide, sea la sección la hipérbola ΑΒΓ [Prop. 11], y la recta ΑΓ la ⟨intersección⟩ con el plano que corta la figura, y sea ΒΔ el eje del hiperboloide y diámetro de la sección [Prop. 11].

314 Considérese tomado un punto Κ en la sección y desde Κ trácese ΚΘ perpendicular a ΑΓ. Ésta será perpendicular al plano en el que se encuentra la sección cónica ΑΒΓ [*Elem.* XI, def. 4]. Trácese ΕΖ que pase por Θ y perpendicular a ΒΔ, y por las rectas ΕΖ, ΚΘ trácese un plano que corte el hiperbo-

loide. Quedará cortado por un plano perpendicular al eje, de modo que la sección será un círculo y su centro será Δ [Prop. 11]. Luego el cuadrado de la perpendicular KΘ será igual al rectángulo comprendido por EΘ, ΘZ. De nuevo, trácese MN paralela a AΓ y tangente a la sección cónica en el punto N, y BT paralela a EZ. Entonces el rectángulo comprendido por EΘ, ΘZ guarda con el rectángulo comprendido por AΘ, ΘΓ la misma razón que el cuadrado de lado BT con el cuadrado de lado TN [Prop. 3]. De modo que el cuadrado que tiene por lado la perpendicular KΘ guarda con el rectángulo comprendido por AΘ, ΘΓ la misma razón que el cuadrado de lado BT con el cuadrado de lado TN.



De la misma manera se demostrará también que los cuadrados construidos sobre las demás perpendiculares trazadas desde la sección hasta AΓ guardan con los rectángulos comprendidos por los segmentos de AΓ que determinan las perpendiculares la misma razón que el cuadrado de lado BT con el cuadrado de lado TN. Y BT es menor que TN, ya que MT es menor que TN. Y MB es menor que BP, pues esto es una propiedad de las hipérbolas.

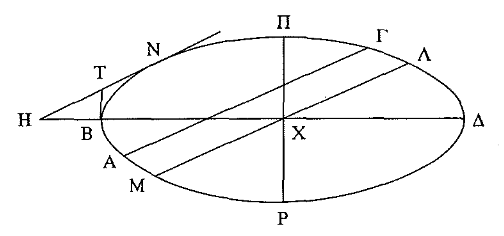
Luego es evidente que la sección es una elipse y que su diámetro mayor es AΓ[59]. 316

[59] *[En la misma situación, siendo NP una perpendicular en la hipérbola, ΓΛ es su diámetro mayor]*.

Proposición 14

Si un elipsoide alargado es cortado por un plano no perpendicular al eje, la sección será una elipse, su diámetro mayor será la recta comprendida en el interior del elipsoide en la sección del plano que corta la figura con el plano trazado por el eje perpendicular al plano secante.

Pues si fuera cortado por el eje o paralelamente al eje, está claro [Prop. 11].



Córtese por otro plano, y una vez cortado éste por un plano que pase por el eje y perpendicular al plano secante, sea la sección del elipsoide la elipse ΑΒΓΔ [Prop. 11], y sea la recta ΓΑ la ⟨intersección⟩ con el plano secante, y sea ΒΔ el eje del elipsoide y diámetro de la elipse, y sea Χ su centro y ΠΡ su diámetro menor. Trácese ΒΤ perpendicular a ΒΔ, y ΗΝ
318 paralela a ΑΓ y tangente a la elipse en el punto Ν, y trácese también ΜΛ pasando por Χ y paralela a ΑΓ.

De modo semejante a las proposiciones anteriores se demostrará que los cuadrados que tienen por lado las perpendiculares trazadas desde la sección hasta ΑΓ guardan con los rectángulos comprendidos por los segmentos de ΑΓ la misma razón que el cuadrado de lado ΒΤ con el cuadrado de lado ΤΝ.

Que la sección es una elipse y ΓΑ su diámetro es evidente [*Cón.* I 21], pero que es el mayor ha de demostrarse.

El rectángulo comprendido por ΠΧ, ΧΡ guarda con el comprendido por ΜΧ, ΧΛ la misma razón que el cuadrado de lado ΒΤ con el cuadrado de lado ΝΤ, puesto que ΠΡ, ΜΛ son paralelas a las tangentes [Prop. 3]. Y el rectángulo comprendido por ΠΧ, ΧΡ es menor que el comprendido por ΜΧ, ΧΛ, puesto que también ΧΠ es menor que ΧΛ. Por tanto, el cuadrado de lado ΒΤ es menor que el cuadrado de lado ΤΝ. De manera que también los cuadrados construidos sobre las perpendiculares trazadas desde la sección hasta ΑΓ son menores que los rectángulos comprendidos por los segmentos de ΑΓ.

Por tanto es evidente que ΓΑ es el diámetro mayor.

Y si un elipsoide achatado es cortado por un plano, lo demás será igual, pero de los diámetros será el menor el comprendido en el interior del elipsoide[60].

A partir de esto es evidente en todas estas figuras que, si son cortadas por planos paralelos, sus secciones serán semejantes, pues los cuadrados construidos sobre las perpendiculares guardarán la misma razón con los rectángulos comprendidos por sus segmentos.

[60] «La recta comprendida en el interior del elipsoide» hemos de entender que se refiere, como en el enunciado, a la «recta intersección del plano que corta la figura con el perpendicular al plano secante trazado por el eje».

320 PROPOSICIÓN 15

En el paraboloide, de las rectas trazadas paralelas al eje desde cualquier punto de la superficie del conoide, las trazadas hacia el lado convexo caerán fuera del paraboloide y las trazadas hacia el otro lado, dentro.

Trazado un plano que pase por el eje y por el punto por el que se traza la paralela al eje, la sección será una parábola [Prop. 11] y su diámetro, el eje del conoide. En la parábola, si se trazan rectas paralelas al diámetro desde cualquier punto de los de la sección, las trazadas hacia el lado convexo caen fuera, y las trazadas hacia el otro lado caen dentro [*Cón.* I 26].

Luego es evidente lo propuesto.

* * *

En el hiperboloide, de las rectas trazadas desde cualquier punto de su superficie paralelas a una recta que vaya al hiperboloide pasando por el vértice del cono que contiene al hiperboloide, las trazadas hacia el lado convexo caerán fuera del hiperboloide y las trazadas hacia el otro lado, dentro.

Si se traza un plano que pase por la recta trazada en el hiperboloide por el vértice del cono que contiene al hiperboloide y por el punto desde el cual se traza la recta que va hacia él[61], la sección será una hipérbola, y su diámetro será la recta trazada en el conoide desde el vértice del cono

[61] Es decir, «hacia el plano mencionado».

[Prop. 11]. Y en la hipérbola, de las rectas trazadas desde cualquier punto de los de la sección paralelas a la recta tra- 322
zada de ese modo[62], las trazadas hacia el lado convexo caen fuera y las trazadas hacia el otro lado, dentro [*Cón.* I 26].

* * *

Si un plano es tangente a una figura conoide sin cortar al conoide, le es tangente en un solo punto, y el plano trazado pasando por el punto de contacto y el eje será perpendicular al plano tangente.

Sea tangente, si es posible, en varios puntos.

Si se toman dos puntos en los que el plano tangente toca al conoide y se trazan desde cada uno de ellos rectas paralelas al eje, al prolongar un plano desde las rectas trazadas paralelas al eje habrá sido trazado por el eje o paralelo al eje. De manera que producirá una sección cónica como sección [Prop. 11], y los puntos estarán en la sección cónica, puesto que están en la superficie y en el plano. La recta que queda entre estos puntos estará dentro de la sección cónica [*Cón.* I 10], de modo que también estará dentro de la superficie del conoide, y esta recta está en el plano tangente, puesto que también lo están los puntos. Por tanto, el plano tangente estará en parte dentro del conoide. Lo cual es imposible, pues se había supuesto que no lo cortaba.

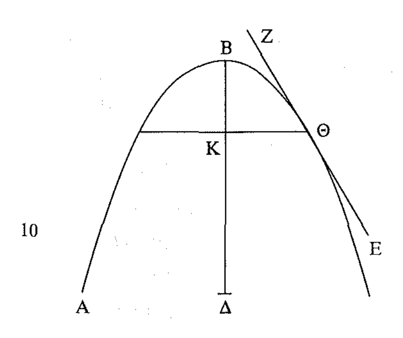
Luego le será tangente en un solo punto.

Que el plano trazado por el punto de tangencia y el eje será perpendicular al plano tangente si éste le es tangente en el vértice del conoide, es evidente.

[62] Es decir, «trazada pasando por el vértice del cono que contiene al hiperboloide».

Pues trazados dos planos que pasen por el eje del conoide, las secciones serán secciones cónicas que tengan por
324 diámetro al eje [Prop. 11], y las rectas tangentes a las secciones cónicas en el extremo del diámetro pertenecerán al plano tangente. Y las rectas tangentes a las secciones cónicas en el extremo del diámetro forman ángulos rectos con el diámetro. Luego en el plano tangente habrá dos rectas perpendiculares al eje. Luego el plano será perpendicular al eje [*Elem.* XI 4]. Luego también es perpendicular al plano trazado por el eje [*Elem.* XI 18].

Ahora, el plano tangente al conoide no lo sea en el vértice.



Trácese un plano que pase por el punto de tangencia y por el eje, y sea la sección del conoide la sección cónica ABΓ [Prop. 11], y sea BΔ su eje y diámetro de la sección, y sea la sección del plano tangente la recta EΘZ, tangente a la sección cónica en el punto Θ, y desde Θ trácese ΘK perpendicular a BΔ, y constrúyase un plano perpendicular al eje. Éste producirá como sección un círculo cuyo centro será K [Prop. 11]. La intersección de este plano y el plano tangente será tangente al círculo. Por tanto, formará ángulos rectos con ΘK [*Elem.* III 18]. De modo que será perpendicular al plano en el que están KΘ, BΔ [*Elem.* XI, def. 4].

Por tanto, es evidente que el plano tangente es perpendicular a ese mismo plano, puesto que también lo son las rectas que hay en él [*Elem.* XI 18].

Proposición 16

Si un plano es tangente a cualquiera de las dos figuras elipsoides sin cortar la figura, le será tangente en un solo punto, y el plano trazado por el punto de contacto y por el eje será perpendicular al plano tangente.

Séale tangente en varios puntos. 326

Si se toman los puntos en los que el plano es tangente al elipsoide y desde cada uno de ellos se trazan rectas paralelas al eje y se traza un plano que pase por las rectas trazadas, la sección será una elipse [Prop. 11] y los puntos estarán dentro de la sección cónica [*Cón.* I 10]. Por tanto, la recta trazada entre los puntos estará dentro de la sección cónica; de modo que también estará dentro de la superficie del elipsoide. Pero la recta está en el plano tangente, puesto que también lo están los puntos. Luego una parte del plano tangente estará dentro del elipsoide. Pero no lo está, pues se había supuesto que no lo cortaba.

Luego es evidente que sólo le será tangente en un punto.

Que el plano trazado por el punto de contacto y por el eje será perpendicular al plano tangente ⟨se demostrará⟩ igual que en el caso del paraboloide y el hiperboloide.

* * *

Si un plano corta por el eje a cualquiera de las figuras conoides o esferoides y se traza una recta tangente a la sección resultante y se construye un plano que pase por la tangente y sea perpendicular al plano secante, es tangente[63] *a*

[63] Entiéndase «el plano recién construido».

la figura en el mismo punto en que la recta es tangente a la sección cónica.

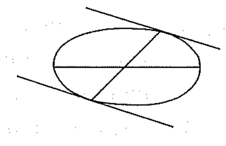
Pues no le será tangente en otro punto de su superficie. Si no, la perpendicular trazada desde ese punto al plano secante caerá fuera de la sección cónica, pues caerá en la tangente, ya que los planos son perpendiculares entre sí. Lo cual es imposible, pues se había demostrado que caerá en su interior [Prop. 11].

* * *

328 *Si dos planos paralelos son tangentes a una de las figuras elipsoides, la recta que une los puntos de tangencia pasará por el centro del elipsoide.*

Si los planos son perpendiculares al eje, es evidente.

Pero no sean perpendiculares.



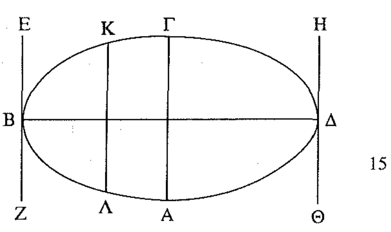
El plano trazado pasando por el eje y por uno de los puntos de contacto será perpendicular al plano tangente [Prop. 16]; de manera que también lo será al que le es paralelo. Luego es de necesidad que el plano trazado pasando por el eje y por cada uno de los puntos de tangencia sea el mismo. Pues, si no, se habrán trazado dos planos perpendiculares al mismo plano pasando por la misma recta que no es perpendicular al plano, pues se había supuesto que el eje no era perpendicular a los planos paralelos. Luego el eje y los puntos de tangencia estarán en el mismo plano, y el elipsoide habrá sido cortado por el eje. Por tanto, la sección será una elipse [Prop. 11] y las intersecciones con los planos tangentes serán paralelas [*Elem.* XI 16] y tangentes a la elipse en los puntos de tangencia de los planos. Y si dos rectas que

son paralelas son tangentes a una elipse, el centro de la elipse y los puntos de tangencia estarán en línea recta.

PROPOSICIÓN 17

Si se trazan dos planos paralelos tangentes a cualquiera de las figuras elipsoides, y se traza un plano que pase por el
centro del elipsoide paralelo a los tangentes, las rectas tra- 330
zadas por la sección resultante[64] *paralelas a la recta que une los puntos de tangencia caerán fuera del elipsoide.*

Supóngase lo dicho y tómese un punto en la sección resultante y trácese un plano por el punto tomado y por la recta que une los puntos de tangencia. Éste cortará al elipsoide y a los planos paralelos. Sea ABΓΔ la[65] sección del elipsoide y las rectas EZ, HΘ las secciones con los planos tangentes, A el punto tomado y sea BΔ la recta que une los puntos de tangencia.



Ésta pasará por el centro [Prop. 16]. La intersección del plano paralelo a los planos tangentes será ΓA. Ésta habrá sido trazada pasando por el centro, puesto que también lo ha sido el plano. Puesto que ABΓΔ es o bien un círculo o bien una elipse [Prop. 14], y las dos rectas EZ, HΘ le son tangentes y AΓ ha sido trazada pasando por el centro paralela a

[64] Es decir, «por la circunferencia del círculo o por la elipse que resulte como sección».

[65] [*Elipse*].

ellas, es evidente que las rectas trazadas desde los puntos A, Γ paralelas a BΔ son tangentes a la sección y caerán fuera del elipsoide.

Pero si el plano paralelo a los planos tangentes no hubiera sido trazado pasando por el centro, como KΛ, es evidente que de las rectas trazadas a partir de la sección unas, las que están hacia el lado del segmento menor, caerán fuera del elipsoide, mientras que las que están hacia el otro lado, dentro.

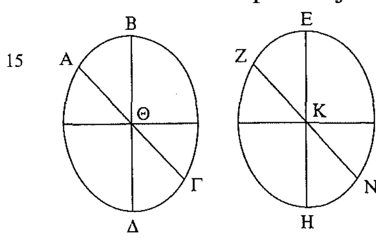
332 Proposición 18

Toda figura elipsoide cortada por un plano que pase por el centro es cortada en dos partes iguales por el plano, tanto ella misma como su superficie.

Córtese el elipsoide por un plano que pase por el centro. Habrá sido cortado por el eje o perpendicularmente al eje o no perpendicularmente al eje.

Si es cortado por el eje o perpendicularmente al eje, es evidente que ha sido cortado, tanto él como su superficie, en dos partes iguales. Pues está claro que una de las partes coincide con la otra y la superficie de una parte con la de la otra.

No sea cortado por el eje ni perpendicularmente al eje.



Si se corta el elipsoide por un plano perpendicular al plano secante que pase por el eje, sea la sección de la figura la elipse ABΓΔ, y sea BΔ su diámetro y eje del elipsoide [Prop. 11], y Θ su centro, y sea la recta AΓ la intersección con el plano secante que pasa por el centro.

Tómese también otro elipsoide igual y semejante a éste, y una vez cortado por un plano que pase por el eje, sea la sección la elipse ΕΖΗΝ, y sea ΕΗ su diámetro y eje del elipsoide y Κ su centro, y por el punto Κ trácese la recta ΖΝ que forme el ángulo Κ igual al ángulo Θ, y por la recta ΖΝ constrúyase un plano perpendicular al plano en que está la sec- 334
ción ΕΖΗΝ.

Entonces ΑΒΓΔ, ΕΖΗΝ son dos elipses iguales y semejantes entre sí. Por tanto, si se pone ΕΗ sobre ΒΔ y ΖΝ sobre ΑΓ, coinciden. Luego también coincide el plano correspondiente a ΝΖ con el plano correspondiente a ΑΓ, puesto que ambos son perpendiculares al mismo plano a partir de la misma recta. Por tanto coincide también el segmento cortado del elipsoide hacia el lado de Ε por el plano correspondiente a ΝΖ con el otro segmento, el cortado del otro elipsoide hacia el lado de Β por el plano correspondiente a ΑΓ, y el segmento restante con el segmento restante, y las superficies de los segmentos con las superficies. A la vez, también si se pone ΕΗ sobre ΒΔ de manera que el punto Ε quede sobre Δ y el punto Η sobre Β y la línea entre los puntos Ν, Ζ sobre la línea entre los puntos Α, Γ, es evidente que las elipses coincidirán una con otra, y el punto Ζ caerá sobre el punto Γ, y el punto Ν sobre el punto Α. E, igualmente, también el plano correspondiente a ΝΖ coincide con el plano correspondiente a ΑΓ, y de los segmentos cortados por el plano correspondiente a ΝΖ, el ⟨que está⟩ hacia la parte de Η coincide con ⟨la parte que está⟩ hacia Β del segmento cortado por el plano correspondiente a ΑΓ, y el ⟨que está⟩ hacia la parte de Ε con el ⟨que está⟩ hacia la parte de Δ. Puesto que el mismo segmento coincide con cada uno de los otros dos segmentos, es evidente que los segmentos son iguales. Por la misma razón, también lo son sus superficies.

336

Proposición 19

Dado un segmento de cualquiera de los dos tipos de conoide cortado por un plano perpendicular al eje, o un segmento no mayor que la mitad de un elipsoide de una u otra clase cortado de manera semejante, es posible inscribir una figura sólida y circunscribir otra compuesta de cilindros de la misma altura de modo que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que cualquier magnitud sólida propuesta.

Sea dado un segmento, como ΑΒΓ, y una vez cortado éste por un plano que pase por el eje, sea la sección del segmento la sección cónica ΑΒΓ [Prop. 11], y sea ΑΓ la ⟨intersección⟩ con el plano que ha cortado el segmento[66], y sea ΒΔ el eje del segmento y diámetro de la sección.

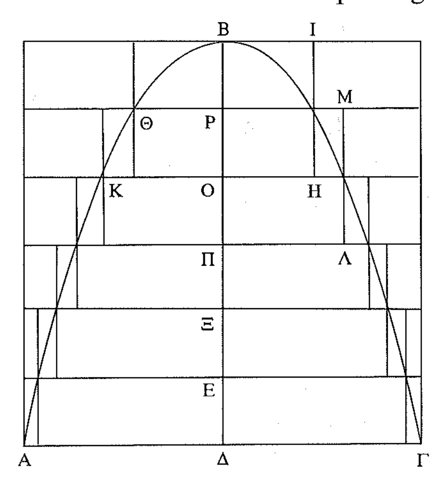
Ya que se ha supuesto que el plano secante era perpendicular al eje, la sección es un círculo, y su diámetro ΓΑ [Prop. 11]. A partir de ese círculo sea un cilindro que tenga por eje ΒΔ. Su superficie, entonces, caerá fuera del segmento, puesto que es un[67] paraboloide, un hiperboloide o un elipsoide no mayor que la mitad del elipsoide [Props. 15, 17]. Cortando este cilindro sucesivamente por la mitad por un plano perpendicular al eje, la parte restante llegará a ser menor que la magnitud sólida propuesta [*Elem.* X 1]. Sea entonces la parte restante de éste[68] un cilindro que tenga por

[66] Entiéndase «la intersección del plano que pasa por el eje del segmento con el plano que había cortado el segmento objeto de estudio».

[67] Ha de entenderse «un segmento de...».

[68] Es decir «del cilindro inicial».

base el círculo de diámetro AΓ, por eje EΔ, y que sea menor que la magnitud sólida propuesta. Córtese BΔ por los puntos P, O, Π, Ξ en partes iguales a EΔ[69], y por los puntos de corte trácense rectas paralelas a AΓ hasta la sección del cono, y a partir de las rectas trazadas constrúyanse planos perpendicu- 338
lares a BΔ. Las secciones serán círculos que tengan su centro



en la recta BΔ [Prop. 11]. A partir de cada uno de los círculos constrúyanse repetidamente dos cilindros que tengan cada uno su eje igual a EΔ, uno hacia el lado del círculo en el que está Δ, otro, hacia el lado en que está B. En el segmento estará inscrita una figura sólida compuesta de los cilindros construidos hacia el lado en que está Δ, y otra circunscrita compuesta de los cilindros construidos hacia el lado en que está B.

[69] La demostración supone el requisito de que BE sea múltiplo de EΔ, como señala Heiberg, pero Arquímedes no menciona ese punto —tampoco Heath ni Dijksterhuis—.

Queda por demostrar que la figura circunscrita excede a la inscrita en una magnitud menor que la magnitud sólida propuesta.

Cada uno de los cilindros de la figura inscrita es igual al cilindro construido sobre el mismo círculo hacia el lado de Β, como ΘΗ es igual a ΘΙ, ΚΛ ⟨igual⟩ a ΚΜ y lo mismo los otros. Y de los cilindros todos y cada uno son iguales a todos y cada uno.

Por tanto, es evidente que la figura circunscrita excede a la inscrita en el cilindro que tiene por base el círculo de diámetro ΑΓ y por altura ΕΔ. Y éste es menor que la magnitud sólida propuesta [por const.].

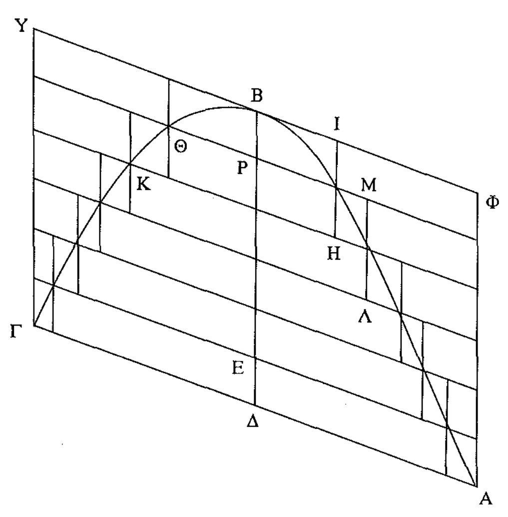
340

Proposición 20

Dado un segmento cortado de un paraboloide o hiperboloide por un plano que no sea perpendicular al eje o de uno cualquiera de los elipsoides, no mayor que la mitad del elipsoide cortado de manera semejante, es posible inscribir en el segmento una figura sólida y circunscribir otra compuesta de troncos de cilindro que tengan igual altura, de manera que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que cualquier magnitud sólida propuesta.

Sea dado un segmento como se ha dicho, y una vez cortada la figura por otro plano que pase por el eje y sea perpendicular al plano que cortaba el segmento dado, sea la sección de la figura la sección cónica ΑΒΓ y sea la recta ΓΑ la ⟨intersección⟩ con el plano que cortaba el segmento. Dado que se ha supuesto que el plano que cortaba el segmento no era perpendicular al eje, la sección será una elipse y su diá-

metro AΓ [Prop. 11]. Sea ΦY paralela a AΓ y tangente a la sección cónica, y séale tangente en el punto B, y por la recta ΦY constrúyase un plano paralelo al plano correspondiente a AΓ. Éste será tangente a la figura en el punto B [Prop. 16]. Y si el segmento lo es de un paraboloide, desde B trácese BΔ paralela al eje; si lo es de un hiperboloide, desde el vértice del cono que contiene al hiperboloide prolónguese como BΔ la recta trazada hasta B; y si lo es de un elipsoide, tómese el segmento BΔ de la recta trazada hasta B[70].



Es evidente que la recta BΔ corta en dos partes iguales a AΓ; por tanto, B será el vértice del segmento y la recta BΔ su 342
eje. Así, hay una elipse de diámetro AΓ y una línea BΔ alzada desde su centro en un plano perpendicular al plano en el que está la elipse, plano que pasa por el otro diámetro[71]. Por tanto, es posible hallar un cilindro que tenga por eje BΔ en

[70] Entiéndase «desde el centro del elipsoide».

[71] Entiéndase «por el otro diámetro de la elipse».

cuya superficie esté la elipse de diámetro ΑΓ [Prop. 9]. Y su superficie quedará fuera del segmento, puesto que es un segmento de paraboloide o de hiperboloide o ⟨un segmento⟩ de elipsoide no mayor que la mitad del elipsoide. Y habrá un tronco de cilindro que tenga por bases la elipse de diámetro ΑΓ y por eje ΒΔ. Si se corta por la mitad[72] el tronco de cilindro por planos paralelos al plano correspondiente a ΑΓ, la parte restante llegará a ser menor que la magnitud sólida propuesta [*Elem.* X 1]. Sea el tronco de cilindro que tenga por base la elipse de diámetro ΑΓ y por eje ΕΔ menor que la magnitud sólida propuesta. Divídase ΔΒ en partes iguales a ΔΕ[73], y desde los puntos de corte trácense rectas paralelas a ΑΓ hasta la sección cónica, y a partir de las rectas trazadas constrúyanse planos paralelos al plano correspondiente a ΑΓ. Éstos cortan a la superficie del segmento, y ⟨las seccio-
344 nes⟩ serán elipses semejantes a la elipse de diámetro ΑΓ, puesto que los planos son paralelos [Prop. 14]. A partir de cada una de las elipses constrúyanse repetidamente dos troncos de cilindro —uno hacia el lado de Δ de la elipse y otro hacia el lado de Β, que tengan sus ejes iguales a ΔΕ. Resultarán unas figuras sólidas, una inscrita en el segmento y otra circunscrita, compuestas de troncos de cilindro que tienen igual altura.

Queda por demostrar que la figura circunscrita excede a la inscrita en una magnitud menor que la magnitud sólida propuesta.

De manera semejante a la proposición anterior se demostrará que la figura circunscrita excede a la inscrita en el tronco de cilindro[74] que tiene por base la elipse de diámetro

[72] Hay que entender «repetidamente», y se aplica *Elem.* X 1.

[73] Cf. más atrás, n. 69 a la prop. 19.

[74] Entiéndase «en una magnitud igual al tronco de cilindro...».

ΑΓ y por eje ΕΔ. Y éste es menor que la figura sólida propuesta [por const.].

PROPOSICIÓN 21

Una vez escritas estas cuestiones previas, demostremos lo propuesto sobre las figuras.

Todo segmento de paraboloide cortado por un plano perpendicular al eje es una vez y media el cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje.

Sea un segmento de paraboloide cortado por un plano 346
perpendicular al eje, y una vez cortado éste por otro plano que pase por el eje, sea la sección de la superficie[75] la parábola ΑΒΓ [Prop. 11], y la ⟨intersección⟩ con el plano que corta el segmento la recta ΓΑ, y sea ΒΔ el eje del segmento, y sea también un cono que tenga la misma base que el segmento y el mismo eje, cuyo vértice sea Β.

Se ha de demostrar que el segmento de paraboloide es una vez y media ese cono.

---

[75] En lugares paralelos (prop. 20, 340, 13-14; prop. 22, 356, 1-2) aparece «la sección de la figura *(toû mèn schḗmatos tomā́)* frente al «la sección de la superficie» (*tês mèn epiphaneías tomā́)* que encontramos aquí. Parece corrupción textual, a la vista de la inexactitud de la expresión «sección de la superficie», pero la unanimidad de los manuscritos y la carencia de argumentos paleográficos hacen arriesgada la conjetura de asemejar este texto a sus paralelos —más aún teniendo en cuenta que supondría recurrir a una perdida *lectio facilior*—. Aún así hay que hacer notar lo anómalo de la expresión. En cualquier caso, aquí el sentido es claramente el de «la sección de la superficie resultante del segundo corte».

Póngase el cono Ψ que sea una vez y media el cono cuya base es el círculo de diámetro ΑΓ y su eje ΒΔ, y sea también un cilindro que tenga por base el círculo de diámetro ΑΓ y por eje ΒΔ. Entonces el cono Ψ será la mitad del cilindro[76].

Digo que el segmento del paraboloide es igual al cono Ψ.

Pues si no es igual, será mayor o menor.

Sea primero, si es posible, mayor.

Inscríbase una figura sólida en el segmento y circunscríbase otra, compuestas de cilindros que tengan igual altura, de modo que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que aquella en la que excede el segmento del paraboloide al cono Ψ [Prop. 19], y de los cilindros que componen la figura circunscrita sea el mayor el que tenga por base el círculo de diámetro ΑΓ y por eje ΕΔ, y sea el menor el que tenga por base el círculo de diámetro ΣΤ
348 y por eje ΒΙ; y de los cilindros que componen la figura inscrita sea el mayor el que tenga por base el círculo de diámetro ΚΛ y por eje ΔΕ, y sea el menor el que tenga por base el círculo de diámetro ΣΤ y por eje ΘΙ, y prolónguense los planos de todos los cilindros hacia la superficie del cilindro que tiene por base el círculo de diámetro ΑΓ y por eje ΒΔ.

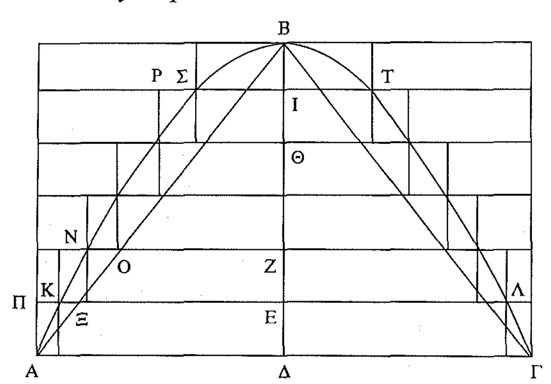
Así, el cilindro entero quedará dividido en cilindros iguales en número a los cilindros que hay en la figura circunscrita e iguales en magnitud al mayor de ellos[77]. Y puesto que la figura circunscrita al segmento excede a la figura

---

[76] [*Puesto que el cono Ψ es una vez y media el mismo cono*]; cf. *Elem.* XII 10.

[77] Es decir, «al mayor de los cilindros que hay en la figura circunscrita».

inscrita en una magnitud menor que el segmento al cono [por const.], es evidente que también la figura inscrita en el segmento es mayor que el cono Ψ.



El primer cilindro de los que hay en el cilindro entero —el que tiene por eje ΔE— guarda con el primer cilindro de los que hay en la figura inscrita —el que tiene por eje ΔE— la misma razón que el cuadrado de ΔA con el cuadrado de 350
KE [*Elem.* XII 11 y XII 2]. Ésa es la misma razón que guardan BΔ con BE[78] y la misma que la que guarda ΔA con EΞ[79].

De la misma manera se demostrará también que el segundo cilindro de los del cilindro entero —el que tiene por eje EZ— guarda con el segundo cilindro de los de la figura inscrita, la misma razón que ΠE —es decir, ΔA— con ZO, y que cada uno de los otros cilindros de los del cilindro entero que tienen su eje igual a ΔE guardará con cada uno de los cilindros de la figura inscrita que tienen el mismo eje la

[78] Este aserto figura como enunciado en *Cuadr. par.* 3; Arquímedes omite la demostración y debemos entender que remite a unos *Elementos de las cónicas* —probablemente los de Euclides o Aristeo— que no han llegado hasta nosotros.

[79] Por semejanza de triángulos.

misma razón que la mitad del diámetro de su base con el segmento tomado de ella entre las rectas AB, BΔ.

Y la suma de todos los cilindros que hay en el cilindro cuya base es el círculo de diámetro AΓ y cuyo eje es la recta ⟨ΔB⟩, guardará con la suma de todos los cilindros que hay en la figura inscrita la misma razón que la suma de todos los radios de los círculos que sirven de base a los cilindros dichos con la suma de todos los segmentos tomados de ellos[80] entre las rectas AB, BΔ. Y la suma de los radios indicados es mayor que el doble de los segmentos indicados sin AΔ; de modo que la suma de todos los cilindros que hay en el cilindro cuyo eje es ⟨ΔB⟩ es mayor que el doble de la figura inscrita. Luego el cilindro entero que tiene por eje ΔB es mucho
352 mayor que el doble de la figura inscrita. Y era el doble del cono Ψ. Luego la figura inscrita es menor que el cono Ψ. Lo cual es imposible, pues se había demostrado que era mayor.

Luego el paraboloide no es mayor que el cono Ψ.

E, igualmente, tampoco es menor.

Pues inscríbase y circunscríbase de nuevo la figura, de modo que exceda[81] en una magnitud menor que aquélla en la que el cono Ψ excede al paraboloide [Prop. 19], y lo demás constrúyase igual que en lo anterior.

Entonces, puesto que la figura inscrita es menor que el segmento y que la figura inscrita es inferior a la circunscrita en una magnitud menor que el segmento al cono Ψ[82], está claro que la figura circunscrita es menor que el cono Ψ. Y de nuevo el primer cilindro de los del cilindro entero —el que tiene por eje ΔE— guarda con el primer cilindro de los

[80] Es decir, «tomados de los radios».

[81] [*Cada una*]: la glosa es errónea.

[82] Entiéndase: «...es inferior a la circunscrita en una magnitud menor que aquélla en la que el segmento de paraboloide es inferior al cono Ψ, ...».

de la figura circunscrita —el que tiene el mismo eje EΔ— la misma razón que el cuadrado de lado AΔ consigo mismo, y el segundo cilindro de los del cilindro entero —el que tiene por eje EZ— guarda con el segundo cilindro de los de la figura circunscrita —el que tiene por eje EZ— la misma razón que el cuadrado de ΔA con el cuadrado de KE. Y esa razón es la misma que la que guarda BΔ con BE y la misma que la que guarda ΔA con EΞ[83]. Y cada uno de los otros cilindros del cilindro entero que tienen su eje igual a ΔE guardará con cada uno de los cilindros de la figura circunscrita que tienen el mismo eje, la misma razón que la mitad del diámetro de su base con el segmento tomado de él[84] entre las rectas AB, 354
BΔ. Y entonces la suma de todos los cilindros del cilindro entero cuyo eje es la recta BΔ guardará con la suma de todos los cilindros de la figura circunscrita la misma razón que la suma de todas las rectas con la suma de todas las rectas[85]. Pero la suma de todos los radios de los círculos que sirven de base a los cilindros es inferior al doble de la suma de todos los segmentos tomados de ellos[86] junto con AΔ. Por tanto, es evidente que la suma de todos los cilindros del cilindro entero es menor que el doble de los cilindros de la figura circunscrita. Luego el cilindro que tiene por base el círculo de diámetro AΓ y por eje BΔ es menor que el doble de la figura circunscrita. Pero no lo es, sino que es mayor que el doble, pues es el doble del cono Ψ y se había demostrado que la figura circunscrita era menor que el cono Ψ.

---

[83] Cf. en esta misma proposición 350, 1 y nota al pasaje.

[84] Entiéndase: «...tomado de la mitad del diámetro de su base...».

[85] Entiéndase: «...guardarán la misma razón que la suma de todos los radios con la suma de los segmentos de los mismos tomados entre las rectas AB, BΔ».

[86] Entiéndase: «...tomados de ellos entre las rectas AB, BΔ...».

Luego el segmento de paraboloide tampoco es menor que el cono Ψ.

Y se había demostrado que tampoco era mayor. Luego es una vez y media el cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje.

Proposición 22

Y si el segmento del paraboloide fuera cortado por un plano que no sea perpendicular al eje, igualmente será una vez y media el tronco de cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje.

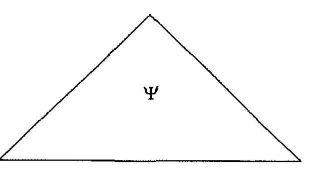
Sea un segmento de paraboloide cortado según se ha di-
356 cho, y una vez cortado por un plano que pase por el eje perpendicular al plano que ha cortado el segmento, sea la sección de la figura la parábola ΑΒΓ [Prop. 11], y sea la intersección con el plano que cortó el segmento la recta ΑΓ, y sea la recta ΦΥ paralela a ΑΓ y tangente a la parábola en el punto Β, y trácese ΒΔ paralela al eje. Ésta cortará por la mitad a ΑΓ; por la recta ΦΥ constrúyase un plano paralelo al correspondiente a ΑΔ. Éste será tangente al paraboloide en el punto Β [Prop. 16], y el punto Β será el vértice del segmento y su eje ΒΔ.

Puesto que el plano correspondiente a ΑΓ ha cortado al paraboloide sin ser perpendicular al eje, la sección es una elipse y su eje mayor ΑΓ [Prop. 12]. Si hay una elipse de eje ΓΑ y una recta ΒΔ que ha sido alzada desde el centro de la elipse en un plano construido pasando por el eje y perpendi-
358 cular al plano en el que está la elipse, es posible hallar un cilindro que tenga su eje en línea recta con ΒΔ y en cuya superficie esté la elipse [Prop. 9]. Y también es posible hallar

un cono que tenga por vértice el punto B y en cuya superficie esté la elipse [Prop. 8]. De manera que habrá un tronco de cilindro que tenga por base la elipse de diámetro AΓ y por eje BΔ, y un tronco de cono que tenga la misma base que el tronco de cilindro y que el segmento y el mismo eje.

Se ha de demostrar que el segmento de paraboloide es una vez y media este cono.

Sea el cono Ψ una vez y media este tronco[87]. El tronco de cilindro que tenga la misma base que el segmento y el mismo eje será el doble que el cono Ψ[88], pues éste es una vez y media el tronco de cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje, mientras que el tronco de cono mencionado es la tercera parte del tronco de cilindro que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje [Prop. 10].



Luego es de necesidad que el segmento de paraboloide sea igual al cono Ψ.

Pues si no es igual, es mayor o menor.

Sea primero, si es posible, mayor.

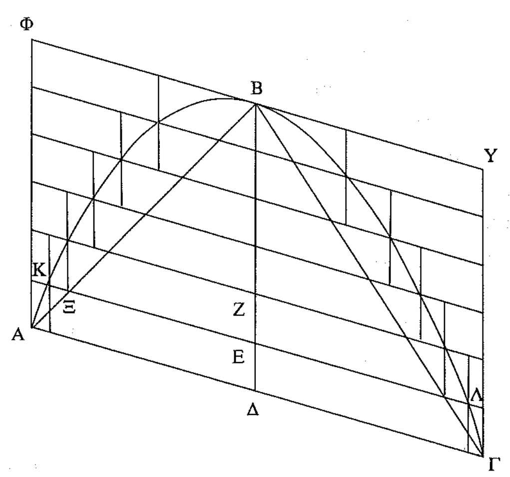
Inscríbase en el segmento una figura sólida y circunscríbase otra compuestas de troncos de cilindro que tengan igual altura, de manera que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que aquélla en la que excede el segmento de paraboloide al cono Ψ [Prop. 20], y trácense los planos de los troncos[89] hasta la superficie del tron-

[87] Entiéndase: «...este tronco de cono».

[88] *Elem.* XII 10. Heiberg considera sospechoso el texto desde «pues éste es...» hasta «...el mismo eje» (358, 14-19) y no faltan razones —considérese la anómala verbosidad de la explicación en 360, 3-14— para sospechar alteraciones en el texto de esta proposición.

[89] «Troncos de cilindro», se entiende.

co[90] que tiene por base la misma que el segmento y el mis-
360 mo eje. De nuevo, el primer tronco de los del tronco entero —el que tiene por eje ΔE— guarda con el primer tronco de los de la figura inscrita —el que tiene por eje ΔE— la misma



razón que el cuadrado de lado AΔ con el cuadrado de lado KE, pues los troncos que tienen la misma altura guardan entre sí la misma razón que sus bases [Prop. 10]; y sus bases, puesto que son elipses semejantes [Prop. 14, corol.], guardan la misma razón que los cuadrados de sus diámetros homólogos [Prop. 6, corol.], y las rectas AΔ, KE son las mitades de sus diámetros homólogos. Y la razón que guardan el cuadrado de AΔ con el cuadrado de KE es la razón que guarda en longitud la recta BΔ con la recta BE [*Cuadr.* Par. 3], puesto que BΔ es paralela al diámetro y AΔ, KE son paralelas a la tangente en el punto B. Y la razón que guarda BΔ con BE es la que guarda AΔ con EΞ. Por tanto, el primer

[90] «De cilindro», se entiende. En ese mismo sentido ha de interpretarse la mención de los «troncos» a lo largo de todo este párrafo.

tronco de los del tronco entero guardará con el primer tronco de los de la figura inscrita la misma razón que AΔ con EΞ. Y cada uno de los otros troncos del tronco entero que tienen su eje igual a ΔE guarda con cada uno de los troncos de la figura inscrita que tienen el mismo eje la misma razón que la mitad del diámetro de sus bases con el segmento tomado de él[91] entre las rectas AB, BΔ.

De la misma manera que en lo anterior se demostrará que la figura inscrita es mayor que el cono Ψ y que el tronco de cilindro que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje es mayor que el doble de la figura inscrita. De modo que también será mayor que el doble del cono Ψ. Pero no lo es, sino que es el doble. Luego el segmento de parabo- 362
loide no es mayor que el cono Ψ.

Por los mismos razonamientos se demostrará que tampoco es menor.

Por tanto, es evidente que es igual. Luego el segmento de paraboloide es una vez y media el tronco de cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje.

Proposición 23

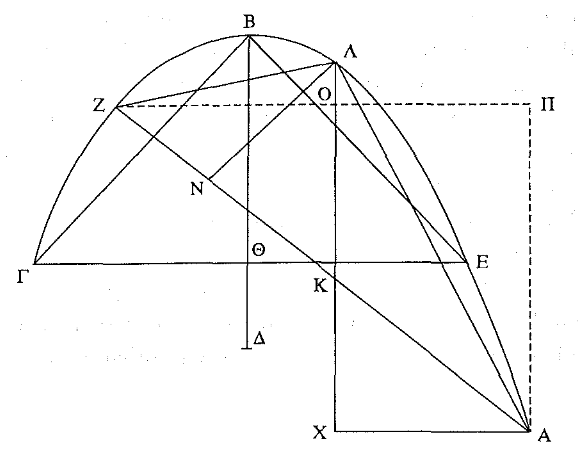
Si de un paraboloide se cortan dos segmentos mediante planos, el uno perpendicular al eje y el otro no perpendicular, y los ejes de los segmentos son iguales, los segmentos serán iguales.

Córtense dos segmentos de un paraboloide según se ha dicho, y una vez cortado el paraboloide por un plano que

[91] Es decir, «de ese mismo diámetro».

pase por el eje[92], sea la sección del paraboloide la parábola ΑΒΓ [Prop. 11], ΒΔ su diámetro, y séanlo las rectas ΑΖ, ΕΓ de los planos[93] —ΕΓ, la del plano perpendicular al eje; ΖΑ, la del no perpendicular— y sean ΒΘ, ΚΛ los ejes, iguales entre sí, de los segmentos, y sean Β, Λ los vértices.

Se ha de demostrar que el segmento de paraboloide cuyo vértice es Β es igual al segmento de paraboloide cuyo vértice es Λ.



Puesto que de la misma parábola han sido quitados dos segmentos, ΑΛΖ y ΕΒΓ, y sus diámetros ΚΛ, ΒΘ son iguales, el triángulo ΑΛΚ es igual al ΕΘΒ —pues se ha demostrado
364 que el triángulo ΑΛΖ es igual al triángulo ΕΒΓ [Prop. 3]. Trácese la recta ΑΧ perpendicular a la prolongación de ΚΛ. Y puesto que ΒΘ, ΚΛ son iguales, también ΕΘ, ΑΧ son iguales [*Elem.* VI 1]. En el segmento cuyo vértice es Β sea un cono inscrito que tenga la misma base que el segmento y el mis-

92 [*Y otro plano perpendicular al eje*].

93 Hay que sobreentender «las intersecciones con el plano que lo corta pasando por el eje».

mo eje, y en el segmento cuyo vértice es Λ sea un tronco de cono que tenga la misma base que el segmento y el mismo eje, y desde Λ trácese ΛΝ perpendicular a ΑΖ. Ésta será la altura del tronco de cono cuyo vértice es Λ. El tronco de cono cuyo vértice es Λ y el cono cuyo vértice es Β guardan entre sí la razón compuesta de la razón de sus bases y la de sus alturas [Prop. 10]; por tanto guardan la razón compuesta de la que guarda el área comprendida por la elipse de diámetro ΑΖ con el círculo de diámetro ΕΓ y de la que guarda ΝΛ con ΒΘ. Por otro lado, el área comprendida por la elipse guarda con el mismo círculo[94] la misma razón que el rectángulo comprendido por los diámetros con el cuadrado de lado ΕΓ [Prop. 5][95]. Entonces el tronco de cono guardaría con el co- 366
no la razón compuesta de la que guarda ΑΚ con ΑΧ —puesto que ΑΧ es igual a ΕΘ— y de la que guarda ΛΝ con ΒΘ. La ⟨razón compuesta⟩ de las razones mencionadas, la que guarda ΑΚ con ΑΧ, es la misma que la que guarda ΛΚ con ΛΝ. Luego el segmento[96] guarda con el cono la razón ⟨compuesta de la⟩ de ΛΚ a ΛΝ y la de ΛΝ con ΒΘ. Y ΒΘ es igual a ΚΛ [por hipót.]. Luego es evidente que el tronco de cono cuyo vértice es Λ es igual al cono cuyo vértice es Β.

Por tanto está claro que los segmentos[97] son iguales, puesto que uno de ellos es una vez y media el cono [Prop. 21]

---

[94] El círculo de diámetro ΕΓ.

[95] [*Y el tronco de cono cuyo vértice es Λ guarda con el cono cuyo vértice es Β la razón compuesta de la que guarda ΚΛ con ΕΘ y la que guarda ΝΛ con ΒΘ, puesto que ΚΛ es la mitad del diámetro de la base del tronco de cono cuyo vértice es Λ, mientras que ΕΘ es la mitad del diámetro de la base del cono y ΛΝ, ΒΘ son sus alturas. ΛΝ guarda con ΒΘ la misma razón que con ΚΛ, puesto que ΒΘ es igual a ΚΛ. Y ΛΝ guarda también con ΚΛ la razón de ΧΛ con ΛΚ*].

[96] «Segmento de cono», se entiende.

[97] «Los segmentos del paraboloide», se entiende.

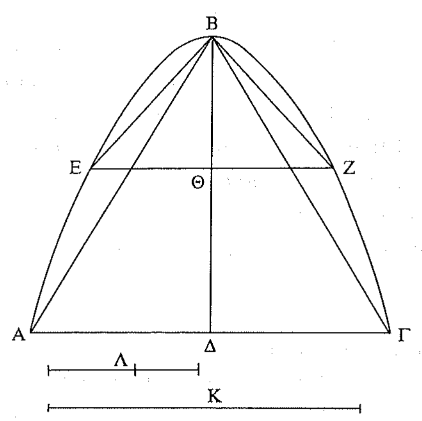
y el otro es una vez y media el tronco de cono [Prop. 22], que son iguales.

Proposición 24

Si de un paraboloide se cortan dos segmentos por planos trazados de cualquier manera, los segmentos guardarán entre sí la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus ejes.

368 Córtense de un paraboloide dos segmentos al azar y sea K igual al eje de uno de los segmentos, y Λ igual al del otro.

Se ha de demostrar que los segmentos guardan entre sí la misma razón que los cuadrados de lado K, Λ.



Una vez cortado el paraboloide por un plano que pase por el eje, sea la sección del segmento la parábola ABΓ [Prop. 11] y su eje BΔ, y tómese BΔ igual a K, y por Δ trácese un plano perpendicular al eje. El segmento del paraboloide que tiene por base el círculo de diámetro AΓ y por eje BΔ

es igual al segmento que tiene su eje igual a Κ [Prop. 23]. Por tanto, si también Κ es igual a Λ, está claro que también los segmentos serán iguales entre sí, pues cada uno de ellos es igual a lo mismo; y también los cuadrados de lado Κ, Λ son iguales. De manera que los segmentos guardarán la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus ejes.

Pero si Λ no es igual a Κ, sea Λ igual a ΒΘ, y por Θ trácese un plano perpendicular al eje. El segmento que tiene por base el círculo de diámetro ΕΖ y por eje ΒΘ es igual al segmento que tiene su eje igual a Λ. Inscríbanse conos que tengan por base los círculos de diámetro ΑΓ, ΕΖ y por vértice el punto Β.

El cono que tiene por eje ΒΔ guarda con el cono que tiene por eje ΒΘ la razón compuesta de la que guarda el cuadrado de lado ΑΔ con el cuadrado de lado ΘΕ y de la razón que guarda ΔΒ con ΒΘ en longitud [Prop. 10]. Y la razón que guarda el cuadrado de ΔΑ con el cuadrado de ΘΕ es la que guarda ΒΔ con ΒΘ en longitud [*Cuadr. Parab.* 3]. Luego el cono que tiene por eje ΒΔ guarda con el cono que tiene por eje ΒΘ la razón compuesta de la que guarda ΔΒ con ΘΒ y la que guarda ΔΒ con ΒΘ. Esa razón es la misma que la que guarda el cuadrado de lado ΔΒ con el cuadrado de lado ΘΒ. Y la razón que guarda el cono que tiene por eje ΒΔ con el cono que tiene por eje ΘΒ, esa razón guarda el segmento de paraboloide que tiene por eje ΔΒ con el segmento que tiene por eje ΘΒ[98]. Y el segmento de paraboloide que tiene su eje igual a Κ es igual al segmento que tiene por eje ΒΔ, mientras que el segmento de paraboloide que tiene su eje igual a Λ es igual al segmento que tiene por eje ΘΒ, y Κ es igual a ΒΔ y Λ es igual a ΘΒ.

[98] *[Pues cada uno es una vez y media]* [Prop. 21].

Luego es evidente que el segmento de paraboloide que tiene su eje igual a Κ guarda con el segmento de paraboloide que tiene su eje igual a Λ la misma razón que el cuadrado de lado Κ con el cuadrado de lado Λ.

Proposición 25

Todo segmento de hiperboloide cortado por un plano perpendicular al eje guarda con el cono que tiene la misma base que el segmento e igual altura la misma razón que
372 *guarda la recta igual a la suma del eje del segmento más el triple de la añadida al eje*[99] *con la recta igual a la suma del eje del segmento más el doble de la añadida al eje.*

Sea un segmento de hiperboloide cortado por un plano perpendicular al eje, y una vez cortado por otro plano que pase por el eje, sea la sección del propio hiperboloide la hipérbola ΑΒΓ [Prop. 11], y ⟨la intersección⟩ con el plano secante la recta ΑΓ, y sea ΒΔ el eje del segmento y sea ΒΘ la añadida al eje y sean ΖΘ y ΖΗ iguales a ΒΘ.

Ω	Ω	Ω	Ω	Ω

Se ha de demostrar que el segmento guarda con el cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que ΗΔ con ΖΔ.

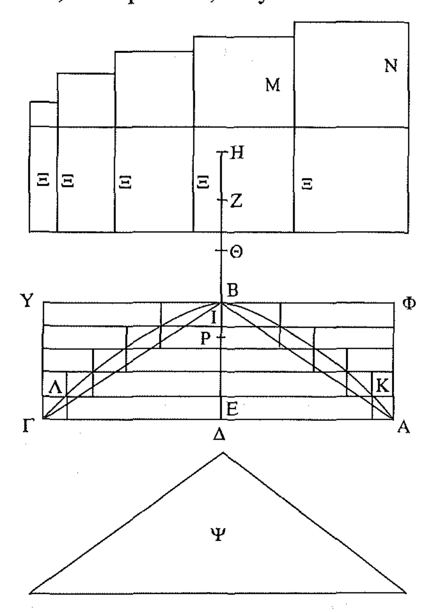
[99] La definición de esta expresión figura en la Carta-dedicatoria de este tratado (250, 6 y ss.).

Sea un cilindro que tenga la misma base que el segmento y el mismo eje, y sean ΦΑ, ΓΥ generatrices, y sea también un cono, en el que figura Ψ, y guarde con el cono que tiene la misma base que el segmento y por eje la recta ΒΔ la misma razón que la que guarda ΗΔ con ΔΖ.

Afirmo que el segmento de hiperboloide es igual al cono Ψ.

Pues si no es igual, o bien es mayor o menor.

Sea primero, si es posible, mayor.



Inscríbase en el segmento una figura sólida y circunscríbase otra compuestas de cilindros que tengan la misma altura, de tal modo que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que aquella en la que excede el segmento de hiperboloide al cono Ψ [Prop. 19], y prolónguense los planos de todos los cilindros hasta la superfi- 374

cie del cilindro que tiene por base el círculo de diámetro AΓ y por eje BΔ. El cilindro entero habrá sido dividido en cilindros iguales en número a los cilindros que hay en la figura circunscrita e iguales en magnitud al mayor de ellos.

Y puesto que la figura circunscrita excede a la inscrita en una magnitud menor que el segmento al cono Ψ y la figura circunscrita es mayor que el segmento, es evidente también que la figura inscrita es mayor que el cono Ψ. Sea BP la tercera parte de BΔ. Entonces HΔ será el triple de ΘP. Y puesto que el cilindro que tiene por base el círculo de diámetro AΓ y por eje BΔ guarda con el cono que tiene la misma base y el mismo eje la misma razón que HΔ con ΘP y que, por otra parte, el cono mencionado guarda con el cono Ψ la misma
376 razón que ZΔ con HΔ, entonces el cilindro mencionado guardará con el cono Ψ la misma razón que ZΔ con ΘP [*Elem.* V 23], dado que hay tres magnitudes en proporción perturbada [*Elem.* V, def. 18].

Dispónganse unas rectas, en las que figura Ξ, iguales en número a los segmentos que hay en la recta BΔ, e iguales cada una en magnitud a ZB, y aplíquese a cada una de ellas un área excedente en la figura de un cuadrado, y sea la mayor igual al rectángulo ZΔB y la menor igual al ZIB, y excédanse los lados de las áreas excedentes unos a otros en
11 lo mismo[100], y sea el lado del área excedente mayor —en la que figura N— igual a BΔ, y el lado del área excedente menor igual a BI, y haya también otras áreas —en las que figura Ω— iguales en número a éstas, y en magnitud igual cada una al área mayor, la comprendida por ZΔB. El cilindro que tiene por base el círculo de diámetro AΓ y por eje ΔE guarda

[100] [*Pues las que son iguales a ellas que están en la recta BΔ también exceden unas de otras en lo mismo].* Arquímedes no hace constar que los excesos en que se exceden las áreas deban ser, además de iguales entre sí, iguales a BΔ, pero se deduce de las conclusiones.

con el cilindro que tiene por base el círculo de diámetro ΚΛ y por eje ΔΕ la misma razón que el cuadrado de ΔΑ con el cuadrado de ΚΕ [*Elem.* XII 11, XII 2]. Y ésa es la misma razón que guarda el rectángulo comprendido por ΖΔ, ΒΔ con el rectángulo comprendido por ΖΕ, ΒΕ, pues eso ocurre en toda hipérbola[101]. Y el área ΞΝ es igual al rectángulo comprendido por ΖΔ, ΒΔ mientras que el área ΞΜ es igual al rectángulo comprendido por ΖΕ, ΒΕ, pues Ξ es igual a ΖΒ, Μ es igual a
ΒΕ y Ν es igual a ΒΔ. Luego el cilindro que tiene por base el 378
círculo de diámetro ΑΓ y por eje ΔΕ guardará con el cilindro que tiene por base el círculo de diámetro ΚΛ y por eje ΔΕ la misma razón que el área Ω con el área ΞΜ.

Del mismo modo se demostrará también que cada uno de los demás cilindros del cilindro entero que tienen por eje la recta igual a ΔΕ guarda con el cilindro de la figura inscrita que tiene el mismo eje[102] la misma razón que la que guarda el área Ω con el área correspondiente de las aplicadas a Ξ y que excedían en un cuadrado.

Y entonces hay algunas magnitudes —los cilindros del cilindro entero cada uno de los cuales tiene el eje igual a ΔΕ— y otras magnitudes —las áreas en las que figura Ω—, iguales a ellas en número, que guardan la misma razón tomadas de dos en dos, puesto que los cilindros son iguales entre sí y las áreas Ω son iguales entre sí, y algunos de los cilindros guardan razón con otros cilindros, los que están en la figura inscrita, pero el último no guarda razón con ninguna figura; y las áreas en las que figura Ω están en razón con

---

[101] [*Que el doble de la añadida al eje, es decir, el doble de la recta trazada desde el centro, es el lado transverso de la figura*]. El carácter de glosa de la frase se evidencia por el uso de terminología creada por Apolonio.

[102] Se entiende «el mismo eje que el cilindro correspondiente de los del cilindro entero».

otras áreas —las aplicadas a Ξ y que son excedentes en una figura de cuadrado—, en la misma razón las que se corresponden, mientras que la última no guarda razón con ninguna. Luego es evidente que la suma de todos los cilindros del cilindro entero guardará con la suma de todos los cilindros de la figura inscrita la misma razón que la suma de todas las áreas Ω con la suma de todas las áreas aplicadas excepto la mayor [Prop. 1]. Y se ha demostrado que la suma de todas las áreas Ω guarda con la suma de todas las áreas aplicadas excepto la mayor una razón mayor que la que guarda ΝΞ con la recta igual a la suma de la mitad de Ξ y la tercera parte de Ν [Prop. 2]. De modo que también el cilindro entero guarda con la figura inscrita una razón mayor que la que guarda ΖΔ con ΘΡ. Que es la que se había demostrado que guardaba el cilindro entero con el cono Ψ. Luego el cilindro entero guarda con la figura inscrita una razón mayor que con el cono Ψ. De modo que el cono Ψ es mayor que la figura inscrita [*Elem.* V 8]: lo cual es imposible, pues se había demostrado que la figura inscrita era mayor que el cono Ψ.

Luego el segmento de hiperboloide no es mayor que el cono Ψ.

Ni tampoco menor. Pero sea, si es posible, menor.

Inscríbase de nuevo en el segmento una figura sólida y circunscríbase otra compuesta de cilindros que tengan la misma altura, de tal modo que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que aquélla en la que excede el cono al segmento, y lo demás constrúyase del mismo modo.

Puesto que la figura inscrita es menor que el segmento y la figura circunscrita excede a la inscrita en una magnitud menor que el cono Ψ al segmento, es evidente que también la figura circunscrita es menor que el cono Ψ. Y de nuevo el primer cilindro de los del cilindro entero, el que tiene por

eje ΔΕ, guarda con el primer cilindro de los de la figura circunscrita, el que tiene por eje ΔΕ, la misma razón que el área Ω con la suma de Ξ, Ν[103], y cada uno de los otros cilindros del cilindro entero que tienen por eje una recta igual a ΔΕ guarda con el cilindro de la figura circunscrita —con el que
le corresponde y tiene el mismo eje— la misma razón que el 382
área Ω con la suma del área correspondiente de las aplicadas a Ξ más el exceso, por ser cada uno de los ⟨cilindros⟩ circunscritos salvo el mayor igual a cada uno de los inscritos incluido el mayor. Así, el cilindro entero guardará con la figura circunscrita la misma razón que la suma de todas las áreas Ω con la suma de las áreas aplicadas más los excesos [Prop. 1].

De nuevo se ha demostrado que la suma de todas las áreas Ω guarda con la suma de todas las otras una razón menor que la que guarda la suma de Ξ, Ν con la recta igual a la suma de la mitad de Ξ más la tercera parte de Ν [Prop. 2]. De modo que también el cilindro entero guardará con la figura circunscrita una razón menor que la de ΖΔ con ΘΡ. Pero ΖΔ es a ΘΡ como el cilindro entero al cono Ψ. Luego el propio cilindro guarda con la figura circunscrita una razón menor que con el cono Ψ. De manera que la figura circunscrita es mayor que el cono Ψ [*Elem.* V 8]. Lo cual es imposible. Pues se había demostrado que la figura circunscrita era menor que el cono Ψ.

Luego el segmento de hiperboloide no es menor que el cono Ψ.

Puesto que no es ni mayor ni menor, queda demostrado lo propuesto.

---

103 [*Pues cada uno es igual al otro*].

Proposición 26

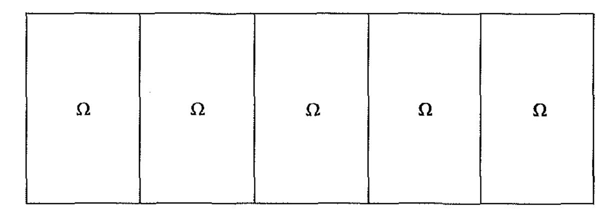
E incluso si el segmento de hiperboloide es cortado por un plano no perpendicular a su eje, guardará con el segmento de cono que tenga la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que una recta igual a la suma
384 *del eje del segmento más el triple de la añadida al eje con la recta igual a la suma del eje más el doble de la añadida al eje.*

Sea un segmento de hiperboloide cortado por un plano según se ha dicho, y una vez cortada la figura por otro plano que pase por el eje y perpendicular al plano que cortó el segmento, sea la sección de la figura la hipérbola ΑΒΓ [Prop. 11] y la intersección con el plano que cortó el segmento la recta ΓΑ, y sea el vértice del cono que contiene al hiperboloide el punto Θ, y trácese por el punto Β y paralela a ΑΓ la recta ΦΥ tangente a la hipérbola, y séale tangente en el punto Β y prolónguese la recta trazada desde Θ hasta Β. Ésta cortará por la mitad a ΑΓ, y el punto Β será el vértice del segmento, ΒΔ su eje y ΒΘ la añadida al eje. Sean ΘΖ y ΖΗ iguales a ΒΘ, y desde ΦΥ constrúyase un plano paralelo al correspondiente a ΑΓ: será tangente al hiperboloide en el punto Β [Prop. 16]. Y puesto que el plano correspondiente a ΑΓ corta al hiperboloide sin ser perpendicular al eje, la sección será una elipse, y su eje mayor ΓΑ [Prop. 13]. Habiendo una elipse de diámetro ΑΓ y una recta ΒΔ alzada desde el centro en un plano construido a partir del diámetro[104] que es perpendicular al plano en que está la elipse, es posible hallar un ci-

[104] «Desde el diámetro de la elipse», se entiende.

lindro que tenga su eje en línea recta con BΔ y en cuya superficie esté la elipse de diámetro AΓ [Prop. 9]. Una vez 386
hallado, habrá un tronco de cilindro que tenga la misma base que el segmento y el mismo eje, y cuya otra base esté en el plano correspondiente a ΦY. A la vez, es posible también hallar un cono que tenga por vértice el punto B y en cuya superficie esté la elipse de diámetro AΓ [Prop. 8]. Una vez hallado, habrá también un tronco de cono que tenga la misma base que el tronco de cilindro y que el segmento, y el mismo eje.

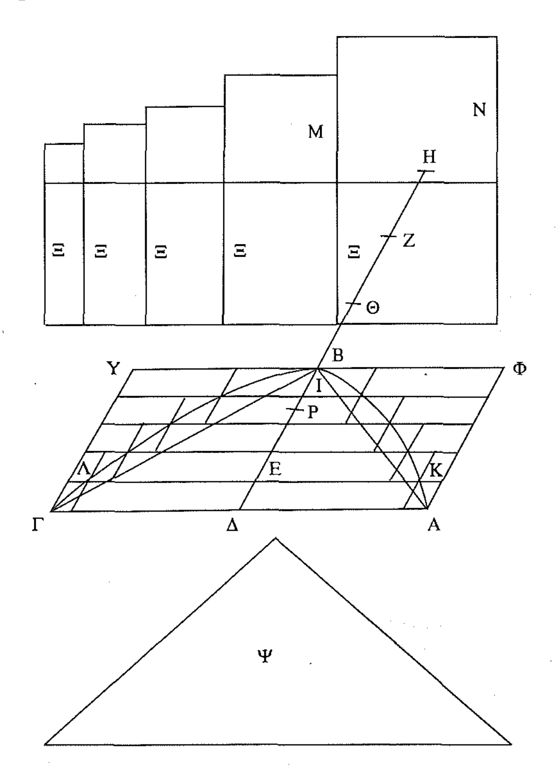
Se ha de demostrar que el segmento de hiperboloide guarda con el segmento de cono indicado la misma razón que HΔ con ΔZ.



Guarde el cono Ψ con el tronco de cono la misma razón que HΔ con ΔZ. Entonces, si el segmento de hiperboloide no es igual al cono Ψ, sea, si es posible, mayor.

Inscríbase en el segmento de hiperboloide una figura sólida y circunscríbase otra compuesta de troncos de cilindro que tengan igual altura, de tal manera que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que aquélla en la que excede el segmento de hiperboloide al cono Ψ 388
[Prop. 20]. Puesto que la figura circunscrita, siendo mayor que el segmento, excede a la figura inscrita en una magnitud menor que el segmento al cono Ψ, es evidente que la figura inscrita es mayor que el cono Ψ. Prolónguense los planos de

todos los troncos de cilindro[105] inscritos en el segmento hasta la superficie del tronco de cilindro que tiene la misma ba-



se que el segmento y el mismo eje, y sea ΒΡ la tercera parte de ΒΔ, y lo demás constrúyase como en las proposiciones anteriores.

[105] Se refiere a los planos de las bases de los troncos de cilindro, como en proposiciones anteriores. También como en las proposiciones anteriores, las menciones que en lo sucesivo se hagan a lo largo de la proposición a los «troncos» hay que entenderlas referidas a estos «troncos de cilindro» de que se componen las figuras inscrita y circunscrita.

De nuevo, el primer tronco de los del tronco entero —el que tiene por eje ΔE— guarda con el primer tronco de los de la figura inscrita —el que tiene por eje ΔE— la misma razón que el cuadrado de lado AΔ con el cuadrado de lado KE, pues los troncos de cilindro que tienen la misma altura guardan entre sí la misma razón que sus bases [Prop. 10]; y sus bases, puesto que son elipses semejantes [Prop. 14, corol.], guardan entre sí la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus ejes correspondientes [Prop. 6 corol.]. Y la razón que guarda el cuadrado de lado AΔ con el cuadrado de lado KE es la que guarda el rectángulo ZΔB con el rectángulo ZEB, puesto que ZΔ ha sido trazada pasando por Θ, punto en el que se cortan las asíntotas[106], y las rectas AΔ, KE son paralelas a la tangente en el punto B. Por otro lado, el rectángulo ZΔB es igual al área Ω, y el ZEB es igual a la suma de las áreas Ξ, M. Luego el primer tronco de los del tronco entero —el que tiene por eje ΔE— guarda con el primer tronco de los de la figura inscrita —el que tiene por eje ΔE— la misma razón que el área Ω con la suma de las áreas Ξ, M. Y cada uno de los otros troncos de los del cilindro entero que tienen su eje igual a ΔE guardan con el tronco correspondiente de los de la figura inscrita que tienen su eje igual a ΔE la misma razón que el área Ω con la correspondiente ⟨área⟩ de las aplicadas a Ξ y excedentes en la forma de un cuadrado.

De nuevo tenemos ciertas magnitudes —los troncos de cilindro del tronco entero— y otras magnitudes —las áreas en las que figura Ω— iguales en número a los troncos y que guardan con ellos de dos en dos la misma razón; y los troncos guardan razón con otros troncos que hay en la figura inscrita, pero el último tronco no guarda razón con ninguno,

[106] Gr. *hai éngista eutheîai;* cf. Introducción, pág. 48.

y las áreas Ω guardan razón con otras áreas —las aplicadas a Ξ, que exceden en figuras de cuadrado— en la misma razón las homólogas, pero la última no guarda razón con ninguna. Es evidente que la suma de todos los troncos[107] guardará con la suma de todos[108] la misma razón que la suma de todas las áreas Ω con la suma de todas las áreas aplicadas excepto la mayor [Prop. 1]. Y la suma de todas las áreas Ω guarda con la suma de todas las áreas aplicadas excepto la mayor una razón mayor que la que guarda la suma de Ξ, Ν con la recta igual a la suma de la mitad de Ξ con la tercera parte de Ν [Prop. 2]. Luego el tronco entero guarda con la figura inscrita una razón mayor que la que guarda la suma de Ξ, Ν con la recta igual a la suma de la mitad de Ξ con la tercera parte de Ν; de modo que también es mayor que la razón que guarda ΖΔ con ΘΡ. Luego el tronco entero guarda con la figura inscrita una razón mayor que con el cono Ψ.
392 Lo cual es imposible, pues se había demostrado que la figura inscrita era mayor que el cono Ψ

Luego el segmento de hiperboloide no es mayor que el cono Ψ.

Y si el segmento de hiperboloide es menor que el cono Ψ, tras inscribir en el segmento una figura sólida y circunscribir otra compuesta de troncos de cilindro que tengan la misma altura, de manera que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que aquélla en la que excede el cono Ψ al segmento, de nuevo se demostrará de manera semejante que la figura circunscrita es menor que el cono Ψ y que el tronco de cilindro que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje guarda con la figura circunscrita una razón menor que con el cono Ψ. Lo cual es

[107] Entiéndase «del tronco entero».

[108] Entiéndase: «de todos los troncos de la figura inscrita».

imposible; por tanto, el segmento de hiperboloide tampoco es menor que el cono Ψ.

Luego es evidente lo propuesto.

Proposición 27

En todo elipsoide cortado por un plano que pase por el centro, perpendicular al eje, la mitad del elipsoide es el doble del cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje.

Sea una figura elipsoide cortada por un plano que pase por el centro perpendicular al eje, y una vez cortada por otro plano que pase por el eje, sea la sección de la figura la elipse ΑΒΓΔ [Prop. 11], sea ΒΔ su diámetro y eje del elipsoide, y Θ su centro. No habrá ninguna diferencia si ΒΔ es el diámetro mayor de la elipse o el menor. Sea la intersección con el plano que ha cortado la figura la recta ΓΑ. Esta recta pasará 394
por Θ y formará ángulos rectos con ΒΔ, dado que se ha supuesto que el plano había sido trazado pasando por el centro y que era perpendicular al eje [*Elem.* XI 18; XI, def. 4].

Se ha de demostrar que la mitad del elipsoide, el segmento que tiene por base el círculo de diámetro ΑΓ y por vértice el punto Β, es el doble del cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje.

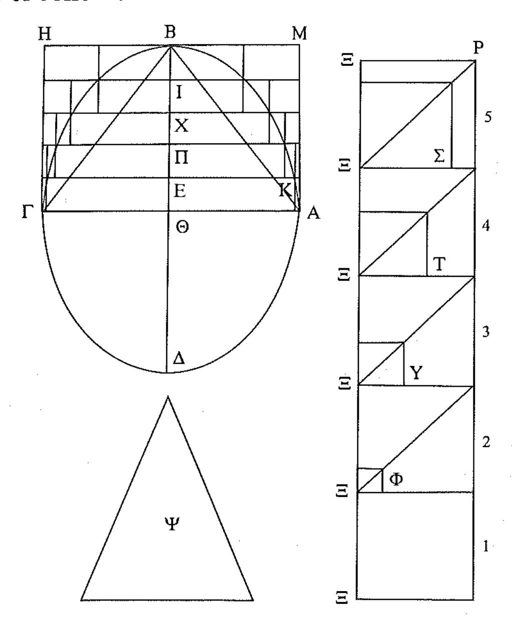
Sea un cono —en el que figura Ψ—, doble del cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje, ΘΒ.

Digo que la mitad del elipsoide es igual al cono Ψ.

Pues si la mitad del elipsoide no es igual al cono Ψ, sea primero, si es posible, mayor.

Inscríbase en el segmento que es la mitad del elipsoide una figura sólida, y circunscríbase otra, compuestas de ci-

lindros que tengan igual altura, de modo que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que aquélla en la que excede la mitad del elipsoide al cono Ψ [Prop. 19]. Puesto que la figura circunscrita es mayor que la mitad del elipsoide, excede a la figura inscrita en una magnitud menor que aquélla en la que excede la mitad del elipsoide al cono Ψ; por tanto es evidente que la figura inscrita en el segmento que es la mitad del elipsoide es también mayor que el cono Ψ.



Sea un cilindro que tenga por base el círculo de diáme-
396 tro AΓ, y por eje BΘ. Puesto que este cilindro es el triple del cono que tiene la misma base que el segmento y la misma altura [*Elem.* XII 10; cf. prop. 10] y el cono Ψ es el doble del mismo cono, es evidente que el cilindro es una vez y media el cono Ψ.

Prolónguense los planos de todos los cilindros de los que se compone la figura inscrita hasta la superficie del cilindro que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje. Entonces el cilindro entero habrá sido dividido en cilindros iguales en número a los cilindros de la figura circunscrita, e iguales en magnitud al mayor de ellos. Dispónganse líneas —en las que figura Ξ— iguales en número a los segmentos de la recta BΘ e igual cada una en tamaño a BΘ, y constrúyase sobre cada una un cuadrado y quítese del último cuadrado un gnomon[109] de anchura igual a BI. Éste será igual al rectángulo comprendido por BI, IΔ; del cuadrado inmediato a éste quítese un gnomon que tenga de anchura el doble de BI. Éste será igual al rectángulo comprendido por BX, XΔ. Y, sucesivamente, quítese del cuadrado inmediato un gnomon cuya anchura sea mayor en un segmento que la anchura del gnomon quitado antes que él. Cada uno de ellos 398
será igual al rectángulo comprendido por los segmentos de BΔ, segmentos de los cuales uno es igual a la anchura del gnomon. Y resultará que el cuadrado restante del segundo cuadrado tendrá el lado igual a ΘE. Y el primer cilindro —el que tiene por eje ΘE— de los del cilindro entero, guarda con el primer cilindro —el que tiene el mismo eje ΘE— de los de la figura inscrita, la misma razón que el cuadrado de lado AΘ con el cuadrado de lado KE [*Elem.* XII 11; XII 2], de manera que también la ⟨misma que guarda⟩ el rectángulo comprendido por BΘ, ΘΔ con el rectángulo comprendido por BE, EΔ [*Cón.* I 21]. Y entonces el cilindro guarda con el cilindro la misma razón que el primer cuadrado con el gnomon quitado del segundo cuadrado. De modo semejante, también cada uno de los otros cilindros que tienen el eje igual a ΘE guarda con el cilindro que hay en la figura inscri-

[109] Para la definición de gnomon, v. nota 82 a *Esf. cil.* I, 16.

ta y que tiene el mismo eje la misma razón que el cuadrado dispuesto de manera semejante a él con el gnomon quitado del cuadrado siguiente.

Y hay unas magnitudes, los cilindros del cilindro entero, y otras, los cuadrados construidos sobre las líneas Ξ Ξ, iguales en número a los cilindros que guardan de dos en dos la misma razón; y los cilindros guardan razón con otras magnitudes —los cilindros de la figura inscrita— y el último no guarda razón con ninguno; y los cuadrados guardan razón con otras magnitudes —los ⟨gnómones⟩ quitados de los cuadrados— guardando los homólogos la misma razón, pero el último cuadrado no guarda razón con ninguno. Así pues, la **400** suma de todos los cilindros que hay en el cilindro entero guardará con la suma de todos los otros cilindros la misma razón que la suma de todos los cuadrados con la suma de todos los gnómones quitados de ellos [Prop. 1]. Por tanto, el cilindro que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje guarda con la figura inscrita la misma razón que la suma de los cuadrados con la suma de todos los gnómones quitados de ellos. Y la suma de los cuadrados es mayor que una vez y media la suma de todos los gnómones quitados de ellos. Y se han dispuesto unas líneas ΞΡ, ΞΣ, ΞΤ, ΞΥ, ΞΦ[110] que se exceden unas a otras en la misma magnitud, y la menor es igual al exceso; y hay otras líneas —en las que figuran las dos Ξ Ξ— iguales en número a éstas, y en magnitud igual cada una a la mayor. Así, la suma de los cuadrados que tienen por lado todas las rectas que son iguales cada una a la mayor es menor que el triple de la suma de todos los cuadrados que tienen por lado las rectas que se exceden entre sí en lo mismo, pero mayor que el triple de la suma de los restantes excepto el que tiene por lado la recta mayor

110 [*ΞΨ, ΞΩ*].

—eso está demostrado en los libros publicados *Sobre las espirales*[111]. Puesto que la suma de todos los cuadrados es menor que el triple de los otros cuadrados —los que han sido quitados de ellos—, es evidente que es mayor que una vez y media los restantes; luego son mayores que una vez y media los gnómones. De manera que también el cilindro que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje es mayor que una vez y media la figura inscrita. Lo cual es imposible, pues es una vez y media el cono Ψ, y se había demostrado que la figura inscrita era mayor que el cono Ψ.

Luego la mitad del elipsoide no es mayor que el cono Ψ.

Y tampoco es menor. 402

Pues sea, si es posible, menor.

Inscríbase de nuevo en la mitad del elipsoide una figura sólida y circunscríbase otra compuesta de cilindros que tengan igual altura, de forma que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que aquélla en la que excede el cono Ψ a la mitad del elipsoide, y dispóngase lo demás igual que en lo anterior.

Puesto que la figura inscrita es menor que el segmento, es evidente que también la figura circunscrita es menor que el cono Ψ. De nuevo el primer cilindro de los del cilindro entero —el que tiene por eje ΘΕ—, guarda con el primer cilindro de los de la figura circunscrita —el que tiene por eje ΘΕ— la misma razón que el primer cuadrado consigo mismo, y el segundo cilindro de los del cilindro entero —el que tiene por eje ΕΠ—, guarda con el segundo cilindro de los de la figura circunscrita —el que tiene por eje ΕΠ— la misma razón que el segundo cuadrado con el gnomon quitado de él. Y cada uno de los otros cilindros de los del cilindro entero, que tienen por eje una recta igual a ΘΕ, guarda con el ci-

[111] *Espirales*, prop. 10, corolario.

lindro correspondiente de los de la figura circunscrita y que tiene el mismo eje la razón que guarda el cuadrado dispuesto de forma semejante a él con el gnomon quitado de él[112]. Así pues, la suma de todos los cilindros del cilindro entero guardará con la suma de todos los cilindros de la figura circunscrita la misma razón que la suma de todos los cuadra-
404 dos con un área igual a la suma del primer cuadrado más los gnómones quitados de los restantes cuadrados [Prop. 1]. Y la suma de todos los cuadrados es menor que una vez y media un área igual a la suma del primer cuadrado más los gnómones quitados de los cuadrados restantes, puesto que es mayor que el triple de los cuadrados que tienen por lado las rectas que se exceden entre sí en lo mismo salvo el cuadrado que tiene por lado la mayor. Luego el cilindro que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje es menor que una vez y media la figura circunscrita. Lo cual es imposible, puesto que es una vez y media el cono Ψ, y se había demostrado que la figura circunscrita es menor que el cono Ψ.

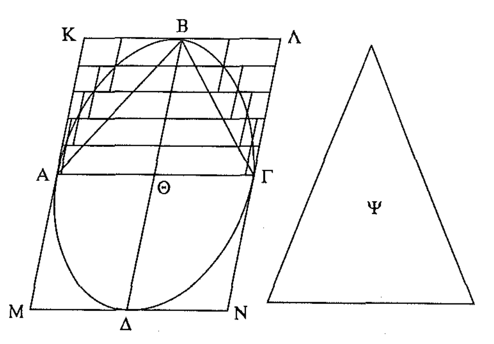
Luego la mitad del elipsoide no es menor que el cono Ψ. Y puesto que no es mayor ni menor, es igual.

PROPOSICIÓN 28

E incluso si el elipsoide es cortado por un plano que pase por el centro no perpendicular al eje, igualmente la mitad del elipsoide será el doble del tronco de cono que tenga la misma base que el segmento y el mismo eje.

[112] Es decir, «del cuadrado en cuestión».

Córtese una figura de elipsoide, y una vez cortada por otro plano que pase por el eje perpendicular al plano secante, sea la sección de la figura la elipse ΑΒΓΔ [Prop. 11] y su centro Θ y sea ⟨la intersección⟩ con el plano que ha cortado



la figura la recta ΑΓ. Ésta habrá sido trazada pasando por Θ, dado que se había supuesto que el plano había sido trazado pasando por el centro. Entonces habrá una elipse de diáme-
tro ΑΓ, ya que se había supuesto que el plano secante no 406
había sido trazado perpendicular al eje [Prop. 14]. Trácense unas rectas ΚΛ, ΜΝ paralelas a ΑΓ tangentes a la elipse en los puntos Β, Δ, y a partir de ΚΛ, ΜΝ constrúyanse planos paralelos al correspondiente a ΑΓ. Éstos son tangentes al elipsoide en los puntos Β, Δ [Prop. 16], y la recta que une ΒΔ pasará por Θ [Prop. 16] y los puntos Β, Δ serán los vértices de los segmentos, y sus ejes[113] serán ΒΘ, ΘΔ. Y es posible hallar un cilindro que tenga por eje ΒΘ en cuya superficie esté la elipse de diámetro ΑΓ [Prop. 9], y una vez hallado habrá un tronco de cilindro que tenga la misma base que la mitad del elipsoide y el mismo eje. A la vez, también es posible hallar un cono que tenga por vértice el punto Β en cuya superficie

[113] Los «ejes de los segmentos», se entiende.

esté la elipse de diámetro ΑΓ [114]. Y una vez hallado habrá un tronco de cono que tenga la misma base que el segmento y el mismo eje.

Digo que la mitad del elipsoide es el doble de ese cono.

Sea el cono Ψ el doble del tronco de cono. Si la mitad del elipsoide no es igual al cono Ψ, sea primero, si es posible, mayor.

He inscrito en la mitad del elipsoide una figura sólida y he circunscrito otra compuesta de troncos de cilindro que
408 tienen igual altura, de modo que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que aquélla en la que excede la mitad del elipsoide al cono Ψ [Prop. 20].

De modo semejante a las proposiciones anteriores se demostrará que la figura inscrita en la mitad del elipsoide es mayor que el cono Ψ y que, al ser el tronco de cilindro que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje una vez y media el cono Ψ, es mayor que una vez y media la figura inscrita en la mitad del elipsoide. Lo cual es imposible. Luego la mitad del elipsoide no será mayor que el cono Ψ.

Y si la mitad del elipsoide es menor que el cono Ψ, inscríbase en la mitad del elipsoide una figura sólida y circunscríbase otra compuesta de troncos de cilindro que tengan igual altura de tal manera que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que aquélla en la que excede el cono Ψ a la mitad del elipsoide [Prop. 20].

De nuevo, de manera semejante a las proposiciones anteriores se demostrará que la figura circunscrita es menor que el cono Ψ y que, al ser el tronco de cilindro que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje una vez y media el cono Ψ, es menor que una vez y media la figura cir-

[114] Cf. prop. 8.

cunscrita. Lo cual es imposible. Luego la mitad del elipsoide tampoco será menor que el cono Ψ.

Puesto que no es ni mayor ni menor, es igual. Luego es evidente lo que había que demostrar.

PROPOSICIÓN 29 410

El segmento menor de toda figura elipsoide cortada por un plano que no pase por el centro perpendicular al eje guarda con el cono que tiene la misma base que el segmento y la misma altura la misma razón que la suma de la mitad del eje del elipsoide más el eje del segmento mayor con el eje del segmento mayor.

Sea un segmento de figura elipsoide cortado por un plano perpendicular al eje que no pase por el centro, y una vez cortado éste por otro plano que pase por el eje, sea la elipse ΑΒΓ la sección de la figura [Prop. 11], y sea el diámetro de la sección y eje del elipsoide la recta ΒΖ y el centro Θ y sea la intersección con el plano que había cortado el segmento la recta ΑΓ. Ésta formará ángulos rectos con ΒΖ, dado que se había supuesto que el plano era perpendicular al eje [*Elem.* XI 18; XI def. 4]. Sea el segmento cortado, cuyo vértice es el punto Β, menor que la mitad de la figura elipsoide, y sea ΖΗ igual a ΒΘ.

Se ha de demostrar que el segmento cuyo vértice es el punto Β guarda con el cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que ΔΗ con ΔΖ.

Sea un cilindro que tenga la misma base que el segmento menor y el mismo eje, y sea un cono —en el que figura
Ψ— que guarde con el cono que tiene la misma base la 412
misma razón que guarda ΔΗ con ΔΖ.

Digo que el cono Ψ es igual al segmento que tiene por vértice el punto Β.

Pues si no es igual, sea primero, si es posible, menor.

He inscrito en el segmento una figura sólida y he circunscrito otra compuesta de cilindros que tienen la misma altura, de manera que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que aquélla en la que el segmento del elipsoide es mayor que el cono Ψ [Prop. 19].

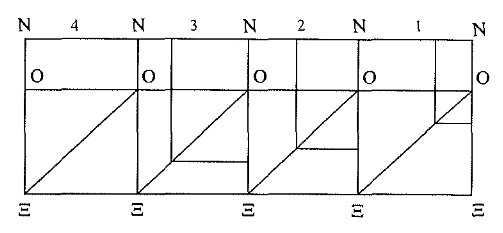
Puesto que, siendo mayor la figura circunscrita que el segmento, excede a la figura inscrita en una magnitud menor que el segmento al cono, es evidente que la figura inscrita es mayor que el cono Ψ. Sea ΒΡ la tercera parte de ΒΔ. Puesto que ΒΗ es el triple de ΒΘ y ΒΔ el de ΒΡ, es evidente que ΔΗ es el triple de ΘΡ; y el cilindro que tiene la misma base que el segmento y por eje ΒΔ guarda con el cono que tiene la misma base y el mismo eje la misma razón que guarda ΔΗ con ΘΡ [*Elem.* XII 10]. Y el cono indicado guarda con
414 el cono Ψ la misma razón que ΔΖ con ΔΗ. Así pues, tratándose de proporciones perturbadas[115], el cilindro que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje guardará con el cono Ψ la misma razón que ΔΖ con ΘΡ [*Elem.* V 23].

Dispónganse líneas —en las que figuran Ξ, Ν— iguales en número a los segmentos que hay en ΒΔ, y en magnitud igual cada una a ΖΔ, y sea también cada una de las líneas ΞΟ igual a ΒΔ; así, cada una de las líneas ΝΟ será el doble de ΘΔ.

---

[115] *Elem.* V, def. 18: «Una proporción perturbada se da cuando, habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, el antecedente es al consecuente en las primeras magnitudes como el antecedente es al consecuente en las segundas magnitudes y en las primeras magnitudes el consecuente es a otra magnitud como en las segundas magnitudes otra magnitud es al antecedente». Cf. el apartado «La teoría de proporciones» en Introducción, pág. 53. La expresión empleada aquí por Arquímedes *(anomoíōs tôn lógōn tetagménōn échein)* difiere de la euclidiana *(tetagménē analogía).*

Aplíquese a cada una de ellas un área que tenga una anchura igual a BΔ, de manera que cada una de las figuras que tienen esos diámetros[116] sea un cuadrado. Quítese del primero un gnomon que tenga una anchura igual a BE; del segundo, uno que tenga una anchura igual a BX, y del mismo modo quítese de cada una de las áreas siguientes un gnomon que tenga

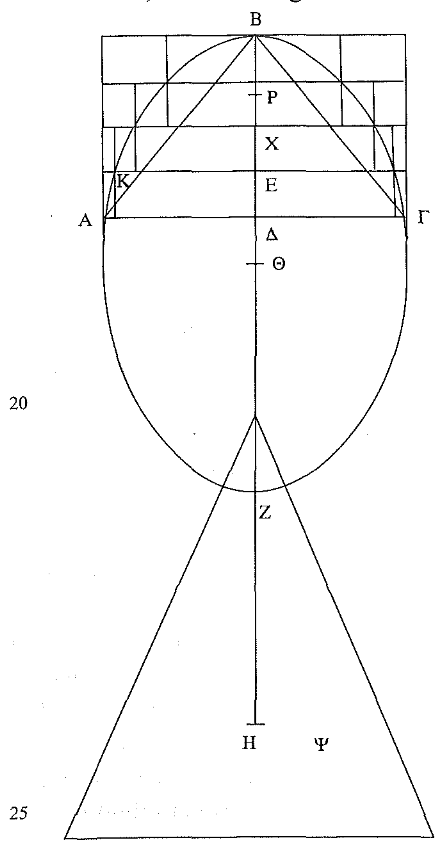


una anchura inferior en un segmento a la anchura del gnomon quitado del ⟨área⟩ anterior a ella. El gnomon quitado de la primera área será igual al rectángulo comprendido por BE, EZ, y el área restante estará aplicada a NO, será excedente en la figura de un cuadrado y tendrá el lado del exceso igual a ΔE; el gnomon quitado de la segunda área será igual al rectángulo comprendido por ZX, XB, y el área restante estará aplicada a NO, será excedente en la figura de un cuadrado, y las figuras restantes serán semejantes a éstas.

Trácense los planos de todos los cilindros de los que se 416
compone la figura inscrita en el segmento hacia la superficie del cilindro que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje. El cilindro entero habrá quedado dividido en cilindros iguales en número a los de la figura circunscrita e iguales en magnitud al mayor de ellos. El primer cilindro de los del cilindro entero —el que tiene por eje ΔE— guarda con el primer cilindro de los de la figura inscrita —el que tiene por eje ΔE— la misma razón que el cuadrado de lado

[116] Se refiere a los diámetros ΞO.

ΔΓ con el cuadrado de lado KE [*Elem.* XII 11; XII 2]. Y esta razón es la misma que la que guarda el rectángulo comprendido por BΔ, ΔZ con el comprendido por BE, EZ [*Cón.* I 21]. Por tanto, el cilindro guarda con el cilindro la misma razón que la primera área con el gnomon quitado de ella. De manera semejante, también cada uno de los otros cilindros de los del cilindro entero, que tienen por eje una recta igual a ΔE, guardará con el cilindro correspondiente de los que hay en la figura inscrita que tiene el mismo eje la misma razón que el área colocada de modo semejante a él con el gnomon quitado de ella.



Por tanto, hay ciertas magnitudes —los cilindros del cilindro entero— y otras magnitudes —las áreas aplicadas a ΞN que tienen por anchura una recta igual a BΔ—, iguales en número a los cilindros y que guardan de dos en dos la misma razón; y los cilindros guardan razón con otros cilindros, los de la figura inscrita, y el último no guarda razón con ninguno; y las áreas guardan razón con otras áreas —los

⟨gnómones⟩ quitados de ellas, en la misma razón las que se 418 corresponden, y la última área no guarda razón con ninguna. Es evidente, por tanto, que la suma de todos los cilindros guardará con la suma de todos los otros ⟨cilindros⟩ la misma razón que la suma de todas las áreas con la suma de todos los gnómones [Prop. 1].

Luego el cilindro que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje guardará con la figura inscrita en el segmento la misma razón que la suma de todas las áreas con la suma de todos los gnómones. Y dado que se han dispuesto ciertas líneas iguales —en las que figura Ν, Ο— y a cada una se le ha aplicado un área excedente en la figura de un cuadrado y los lados de los excesos se exceden entre sí en lo mismo, y el exceso es igual a la menor, y que hay otras áreas aplicadas a ΞΝ, que tienen por anchura rectas iguales a ΒΔ, iguales en número a las anteriores, e iguales en magnitud cada una a la mayor, es evidente que la suma de todas las áreas cada una de las cuales es igual a la mayor, guarda con la suma de todas las otras áreas una razón menor que la que guarda ΞΝ con una recta igual a la suma de la mitad de ΝΟ más la tercera parte de ΞΟ [Prop. 2]. Luego es evidente que la suma de esas mismas áreas guardará con la suma de todos los gnómones una razón mayor que la que guarda ΞΝ con una recta igual a la suma de la mitad de ΝΟ más las dos terceras partes de ΞΟ. Luego el cilindro que tiene por base la misma que el segmento y el mismo eje guarda con la figura inscrita en el segmento una razón mayor que la que guarda ΞΝ con una recta igual a la suma de la mitad de ΝΟ más dos tercios de ΞΟ. Y ΔΖ es igual a ΞΝ, y ΔΘ es igual a la mitad de ΝΟ, y ΔΡ es los dos tercios de ΞΟ. Luego el cilindro entero 420 guarda con la figura inscrita en el segmento una razón mayor que la que guarda ΔΖ con ΘΡ. Y se había demostrado que la razón que guarda ΔΖ con ΘΡ era la que guardaba con el

cono Ψ ese mismo cilindro. Por tanto, guardará una razón mayor con la figura inscrita que con el cono Ψ; lo cual es imposible, pues se había demostrado que la figura inscrita era mayor que el cono Ψ.

Luego el segmento de elipsoide no es mayor que el cono Ψ.

Pues sea, si es posible, menor.

De nuevo inscríbase en el segmento una figura sólida y circunscríbase otra, compuesta de cilindros que tienen la misma altura, de manera que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que aquélla en la que es mayor el cono Ψ que el segmento [Prop. 19], y dispóngase lo demás igual que en lo anterior.

Puesto que la figura inscrita es menor que el segmento y puesto que la figura circunscrita la excede en una magnitud menor que el cono Ψ al segmento, es evidente que la figura circunscrita es menor que el cono Ψ. Y de nuevo el primer cilindro de los del cilindro entero —el que tiene por eje ΔΕ— guarda con el primer cilindro —el que tiene el mismo eje— de los de la figura circunscrita la misma razón que la última área de las aplicadas a ΞΝ que tienen la anchura igual a ΒΔ consigo misma. Pues ambas figuras son iguales. Y el segundo cilindro de los del cilindro entero —que tiene el eje igual a ΔΕ— guarda con el cilindro que le corresponde de los de la figura circunscrita la misma razón que la primera
422 área de las aplicadas a ΞΝ, que tienen la anchura igual a ΒΔ, con el gnomon quitado de ella; y cada uno de los otros cilindros del cilindro entero y que tienen el eje igual a ΔΕ guardan con el cilindro correspondiente de los de la figura circunscrita la misma razón que el área correspondiente a él[117] de las aplicadas a ΞΝ con el gnomon quitado de ella,

[117] Es decir, «al cilindro de los del cilindro entero».

considerando que la última área es la primera. Por tanto, la suma de todos los cilindros del cilindro entero guardará con la suma de todos los cilindros de la figura circunscrita la misma razón que la suma de todas las áreas aplicadas a ΞΝ con ⟨un área⟩ igual a la suma del área situada la última más los gnómones quitados de las otras áreas, por la misma razón que en lo anterior [Prop. 1].

Puesto que se ha demostrado que la suma de todas las áreas aplicadas a ΞΝ guarda con la suma de todas las áreas aplicadas a ΝΟ —excepto la mayor— y que tienen un exceso en forma de un cuadrado una razón mayor que la que guarda ΞΝ con una recta igual a la suma de la mitad de ΝΟ y la tercera parte de ΞΟ [Prop. 2], es evidente que esas mismas áreas guardan con las restantes, que son iguales a la suma del área situada la última más los gnómones quitados de las restantes, una razón menor que la que guarda ΞΝ con una recta igual a la suma de la mitad de ΝΟ más dos tercios de ΞΟ. Es evidente, por tanto, que el cilindro que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje guarda con la figura circunscrita una razón menor que la que guarda ΖΔ con ΘΡ. Pero la razón que guarda ΔΖ con ΘΡ es la que guarda el 424
cilindro mencionado con el cono Ψ. Luego el mismo cilindro guarda una razón menor con la figura circunscrita que con el cono Ψ. Lo cual es imposible, pues se había demostrado que la figura circunscrita era menor que el cono Ψ. Luego no es menor que el cono.

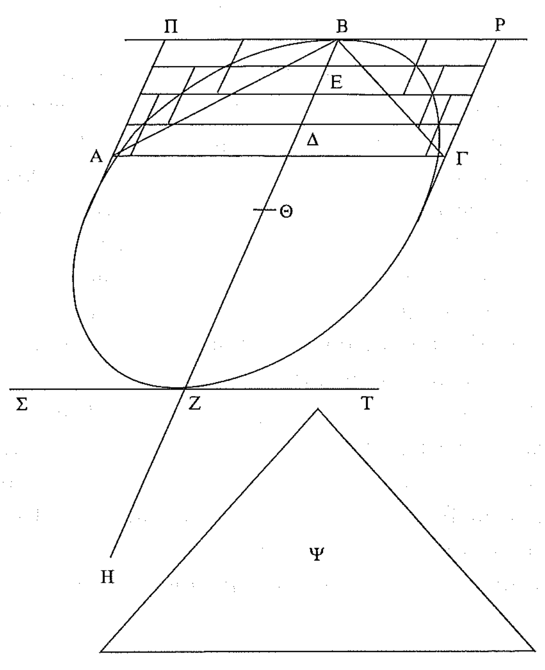
Puesto que no es ni mayor ni menor, entonces es igual.

Proposición 30

Y también si el elipsoide es cortado por ⟨un plano⟩ que no sea perpendicular al eje ni pase por el centro, su seg-

mento menor guardará con el segmento de cono que tenga la misma base que el segmento ⟨del elipsoide⟩ y el mismo eje la misma razón que una recta igual a la suma de la mitad de la recta que une los vértices de los segmentos resultantes más el eje del segmento mayor con el eje del segmento mayor.

Córtese, pues, una figura elipsoide como se ha dicho y, una vez cortada la misma por un plano que pase por el eje y perpendicular al plano secante, sea la elipse ΑΒΓ la sección



de la figura [Prop. 11] y la recta ΓΑ la intersección con el plano que corta la figura; y paralelas a ΑΓ trácense ΠΡ, ΣΤ tangentes a la elipse en los puntos Β, Ζ y constrúyanse a partir de ellas planos paralelos al correspondiente a ΑΓ. Éstos

serán tangentes al elipsoide en los puntos B, Z [Prop. 16], y los puntos B, Z serán los vértices de los segmentos. Trácese la línea que une los vértices de los segmentos, y sea BZ; ésta 426
pasará por el centro [Prop. 16]. Y sea el punto Θ el centro del elipsoide y de la elipse.

Dado que se había supuesto que la figura había sido cortada por un plano no perpendicular al eje, la sección es una elipse y su diámetro ΓΑ [Prop. 14]. Tómese pues el cilindro que tiene su eje en línea recta con ΒΔ, en cuya superficie estará la elipse de diámetro ΑΓ [Prop. 9] y tómese el cono que tiene por vértice el punto B, en cuya superficie estará la elipse de diámetro ΑΓ [Prop. 8]. Habrá un tronco de cilindro que tenga la misma base que el segmento y el mismo eje y un tronco de cono que tenga la misma base que el segmento y el mismo eje.

Se ha de demostrar que el segmento del elipsoide cuyo vértice es B guardará con el segmento de cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que ΔΗ con ΔΖ. Por otro lado, sea ΖΗ igual a ΘΖ.

Tómese un cono —en el que figura Ψ— que guarde con el tronco de cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que guarda ΔΗ con ΔΖ.

Si el segmento del elipsoide no es igual al cono Ψ, sea primero, si es posible, mayor.

He inscrito en el segmento de elipsoide una figura sólida y he circunscrito otra compuesta de troncos de cilindro que 428
tienen igual altura, de modo que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que aquélla en la que el segmento de elipsoide excede al cono Ψ [Prop. 20].

De modo semejante a la proposición anterior se demostrará que la figura inscrita es mayor que el cono Ψ y que el tronco de cilindro que tiene la misma base que el segmento

y el mismo eje guarda con la figura inscrita una razón mayor que con el cono Ψ. Lo cual es imposible.

Por tanto, el segmento de elipsoide no será mayor que el cono Ψ.

Pues sea, si es posible, menor.

Inscríbase de nuevo en el segmento una figura sólida y circunscríbase otra compuestas de troncos de cilindro que tengan igual altura, de manera que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que aquélla en la que excede el cono Ψ al segmento [Prop. 20].

De nuevo, por los mismos ⟨razonamientos⟩ se demostrará que la figura circunscrita es menor que el cono Ψ y que el tronco de cilindro que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje guarda con la figura circunscrita una razón menor que con el cono Ψ. Lo cual es imposible.

Por tanto, el segmento tampoco será menor que el cono.

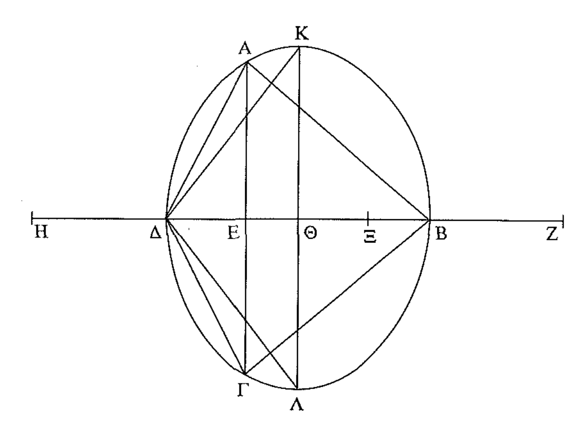
Luego es evidente lo que había que demostrar.

Proposición 31

El segmento mayor de toda figura elipsoide cortada por un plano perpendicular al eje que no pase por el centro guarda con el cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que una recta igual a la
430 *suma de la mitad del eje del elipsoide más el eje del segmento menor con el eje del segmento menor.*

Córtese un elipsoide según se ha dicho, y una vez cortado por otro plano que pase por el eje perpendicular al plano secante, sea la elipse ΑΒΓ la sección de la figura [Prop. 11], y sea su diámetro y eje de la figura la recta ΒΔ y sea ⟨la intersección⟩ con el plano secante la recta ΓΑ. Ésta será per-

pendicular a BΔ [Prop. 17, 394, 1-4]. De los segmentos, sea mayor aquél cuyo vértice es B y sea Θ el vértice del elipsoide. Añádanse[118] la recta ΔH igual a ΔΘ y la recta BZ igual a la misma.



Se ha de demostrar que el segmento de elipsoide cuyo vértice es B guarda con el cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que guarda EH con EΔ.

Córtese el elipsoide por un plano que pase por el centro perpendicular al eje y con base en el círculo resultante [Prop. 11] sea un cono que tenga por vértice el punto Δ. El elipsoide entero es el doble del segmento que tiene por base el círculo de diámetro KΛ y por vértice el punto Δ [Prop. 18], y el segmento dicho es el doble del cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje —eso está demostrado [Prop. 27]—. Por tanto, el elipsoide entero es el cuádruple del cono indicado. Y ese cono guarda con el cono
que tiene por base el círculo de diámetro AΓ y por vértice el 432
punto Δ la razón compuesta de la que guarda ΘΔ con EΔ y de

[118] «Como prolongación de BΔ», se entiende.

la que guarda el cuadrado de lado ΚΘ con el cuadrado de lado ΕΑ[119]. Y la razón que guarda el cuadrado de lado ΚΘ con el cuadrado de lado ΕΑ es la misma que la que guarda el rectángulo ΒΘ, ΘΔ con el rectángulo ΒΕ, ΕΔ [*Cón.* I 21]. Guarde ΞΔ con ΘΔ la razón que guarda ΘΔ con ΕΔ [*Elem.* VI 11]. Por tanto, también el rectángulo comprendido por ΞΔ, ΒΘ guardará con el comprendido por ΒΘ, ΘΔ la razón que guarda ΔΘ con ΔΕ. Y la razón compuesta de la que guarda el rectángulo comprendido por ΞΔ, ΘΒ con el comprendido por ΒΘΔ y de la que guarda ΒΘ, ΘΔ con el rectángulo ΒΕ, ΕΔ es la misma que la que guarda el rectángulo comprendido por ΞΔ, ΒΘ con el comprendido por ΒΕ, ΕΔ. Por tanto, el cono que tiene por base el círculo de diámetro ΚΑ y por vértice el punto Δ guarda con el cono que tiene por base el círculo de diámetro ΑΓ y por vértice el punto Δ la misma razón que el rectángulo comprendido por ΞΔ, ΒΘ con el comprendido por ΒΕ, ΕΔ. Y el cono que tiene por base el círculo de diámetro ΑΓ y por vértice el punto Δ guarda con el segmento de elipsoide que tiene por base la misma que él y el mismo eje la misma razón que guarda el rectángulo comprendido por ΒΕ, ΕΔ con el comprendido por ΖΕ, ΕΔ[120].

434 5 Luego el cono que hay en la mitad del elipsoide guarda con el segmento de elipsoide menor que su mitad la misma razón que el rectángulo comprendido por ΞΔ, ΒΘ con el

[119] Cf. Prop. 10 y *Elem.* XII 2.

[120] [*Es decir, la razón de* ΒΕ *a* ΕΖ*; pues se ha demostrado que el ⟨segmento⟩ menor que la mitad del elipsoide guarda con el cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que la recta igual a la suma de la mitad del eje del elipsoide más el eje del segmento mayor con el eje del segmento menor, y ésa es la razón que guarda* ΖΕ *con* ΒΕ]. El pasaje secluido repite la tesis de la prop. 29 y la repetición es manifiestamente innecesaria.

comprendido por ZE, EΔ [*Elem.* V 22]. Puesto que el elipsoide entero guarda con el cono de la mitad del elipsoide la misma razón que el rectángulo comprendido por ZH, ΞΔ con el comprendido por BΘ, ΞΔ[121], el cono que hay en la mitad del elipsoide guarda con el segmento menor que la mitad del elipsoide la misma razón que el rectángulo comprendido por ΞΔ, BΘ con el comprendido por ZE, EΔ, y entonces el elipsoide entero guardaría con su segmento menor la misma razón que el rectángulo comprendido por ZH, ΞΔ con el comprendido por ZEΔ [*Elem.* V 22]. De modo que también el segmento mayor del elipsoide guarda con el menor la misma razón que el exceso en que excede el rectángulo comprendido por ZH, ΞΔ al comprendido por ZEΔ con el rectángulo comprendido por ZE, EΔ [*Elem.* V 17]. Y el rectángulo comprendido por ZH, ΞΔ excede al comprendido por ZE, EΔ en el rectángulo comprendido por ΞΔ, EH más el comprendido por ZE, ΞE. Luego el segmento mayor del elip- 436
soide guarda con el menor la misma razón que la suma del rectángulo comprendido por ΞΔ, EH más el comprendido por ZE, ΞE con el rectángulo comprendido por ZE, EΔ. Y el segmento menor del elipsoide guarda con el cono que tiene la misma base que él y el mismo eje la misma razón que el rectángulo comprendido por ZE, EΔ con el rectángulo comprendido por BEΔ[122], y el cono que hay en el segmento menor guarda con el cono que hay en el segmento mayor la misma razón que el rectángulo comprendido por BE, EΔ con el cuadrado de lado BE; pues los conos guardan la razón de sus alturas, ya que tienen la misma base [*Elem.* XII 14]. Por tanto, el segmento mayor del elipsoide guardaría con el cono inscrito en él la misma razón que la suma del rectángulo

[121] [*Pues cada uno es el cuádruple*].

[122] [*Pues guarda la misma razón que ZE con BE*].

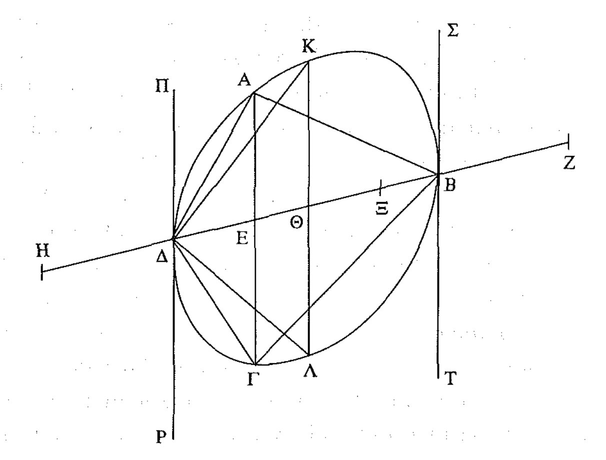
comprendido por ΞΔ, EH más el rectángulo comprendido por ZE, ΞE con el cuadrado de lado BE [*Elem.* V 22]. Y ésa razón es la misma que la que guarda EH con EΔ. Pues el rectángulo comprendido por ΞΔ, EH guarda con el comprendido por ΞΔ, EΔ la misma razón que EH con EΔ, y el rectángulo comprendido por ΞE, ZE guarda con el rectángulo comprendido por ZE, ΘE la misma razón que EH con EΔ; pues ΞE guarda con ΘE la misma razón que EH con EΔ por estar en proporción ΞΔ, ΘΔ, ΔE y ser ΘΔ igual a HΔ. Y el rectángulo igual a la suma del rectángulo comprendido por ΞΔ, EH más el comprendido por ZE, ΞE guarda con el rectángulo igual a
438 la suma de ΞΔ, EΔ más el comprendido por ZE, ΘE la misma razón que EH con EΔ. Y el cuadrado de lado EB es igual a la suma del rectángulo comprendido por ΞΔ, EΔ más el comprendido por ZE, ΘE; pues el cuadrado de lado BΘ es igual al rectángulo comprendido por ΞΔ, EΔ, mientras que el exceso en que es mayor el cuadrado de lado BE que el cuadrado de lado BΘ es igual al rectángulo comprendido por ZE, ΘE, puesto que BΘ, BZ son iguales.

Por tanto, es evidente que el segmento mayor del elipsoide guarda con el cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que EH con EΔ.

Proposición 32

Y también si el elipsoide es cortado por un plano que no sea perpendicular al eje ni pase por el centro, su segmento mayor guarda con el tronco de cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que la recta igual a la suma de la mitad de la recta que une los vértices de los segmentos resultantes más el eje del segmento menor con el eje del segmento menor.

Córtese el elipsoide por un plano según se ha dicho, y una vez cortado por otro plano que pase por el eje y perpendicular al plano secante, sea la sección de la figura la elipse ΑΒΓΔ [Prop. 11], y ⟨sea la intersección⟩ con el plano que ha cortado la figura la recta ΓΑ, y trácense ΠΡ, ΣΤ paralelas a ΑΓ 440 y tangentes a la elipse en los puntos Β, Δ, y constrúyanse a partir de ellas planos paralelos al correspondiente a ΑΓ. Éstos serán tangentes al elipsoide en los puntos Β, Δ [Prop. 16], y Β, Δ serán los vértices de los segmentos. Trácese pues la recta ΒΔ que una los vértices de los segmentos resultantes. Ésta pasará por el centro [Prop. 16]. Y sea el centro Θ y sea el segmento cuyo vértice es Β mayor que la mitad del elipsoide, y añádanse[123] la recta ΔΗ igual a ΔΘ y la recta ΒΖ igual a la misma.



Se ha de demostrar que el segmento mayor del elipsoide guarda con el tronco de cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje la misma razón que ΕΗ con ΕΔ.

[123] Como en la proposición anterior, debemos entender «como prolongación de ΒΔ».

Córtese el elipsoide por un plano que pase por el centro paralelo al plano correspondiente a ΑΓ, e inscríbase en la mitad del elipsoide un tronco de cono que tenga por vértice el punto Δ y guarde ΞΔ con ΘΔ la razón que guarda ΔΘ con ΕΔ. De modo semejante a la demostración anterior se demostrará que el tronco de cono inscrito en la mitad del elipsoide guarda con el tronco de cono inscrito en el ⟨segmento⟩
442 menor la misma razón que el rectángulo comprendido por ΞΔ, ΒΘ con el comprendido por ΒΕ, ΕΔ, y que el tronco de cono inscrito en el segmento menor guarda con el segmento en que está inscrito la misma razón que el rectángulo comprendido por ΒΕ, ΕΔ con el comprendido por ΖΕ, ΕΔ. Por tanto, el tronco de cono inscrito en la mitad del elipsoide guardará con el segmento menor del elipsoide la misma razón que el rectángulo comprendido por ΞΔ, ΒΘ con el comprendido por ΖΕ, ΕΔ [*Elem.* V 22]. Por tanto, el elipsoide entero guardará con el tronco de cono inscrito en la mitad del elipsoide la misma razón que el rectángulo comprendido por ΖΗ, ΞΔ con el comprendido por ΒΘ, ΞΔ —pues cada uno será el cuádruple de cada uno—. Y el tronco de cono indicado guarda con el segmento menor del elipsoide la misma razón que el rectángulo comprendido por ΞΔ, ΒΘ con el comprendido por ΖΕ, ΕΔ. Por tanto el elipsoide entero guardará con su segmento menor[124] la misma razón que el rectángulo comprendido por ΖΗ, ΞΔ con el comprendido por ΖΕ, ΕΔ [*Elem.* V 22]. Y el propio segmento mayor guarda con el menor la misma razón que el exceso en que excede el rectángulo comprendido por ΖΗ, ΞΔ al comprendido por ΖΕ, ΕΔ con el rectángulo comprendido por ΖΕ, ΕΔ [*Elem.* V 17]. Y el segmento menor guarda con el tronco de cono inscrito en
444 él la misma razón que el rectángulo comprendido por ΖΕ, ΕΔ

[124] [*Del propio elipsoide*].

con el comprendido por BE, EΔ[125]. Y el tronco de cono inscrito en el segmento menor guarda con el tronco de cono inscrito en el segmento mayor la misma razón que el rectángulo comprendido por BE, EΔ con el cuadrado de lado BE. Pues los mencionados troncos de cono guardan la razón de sus alturas, pues tienen la misma base [Prop. 10], y sus alturas guardan la misma razón que ΔE con EB. Por tanto, también el segmento mayor del elipsoide guarda con el tronco de cono inscrito en él la misma razón que el exceso en que excede el rectángulo comprendido por HZ, ΞΔ al comprendido por ZEΔ con el cuadrado de lado BE.

Y de modo semejante a lo anterior se demostraría que esta razón es la misma que la que guarda EH con EΔ.

---

[125] [*Pues ya se ha demostrado que guarda la razón de* ZE *con* BE]. La indicación se encuentra en lugar improcedente.

EUTOCIO

EL PROBLEMA DÉLICO (DEL COMENTARIO AL LIBRO II DE «SOBRE LA ESFERA Y EL CILINDRO»)

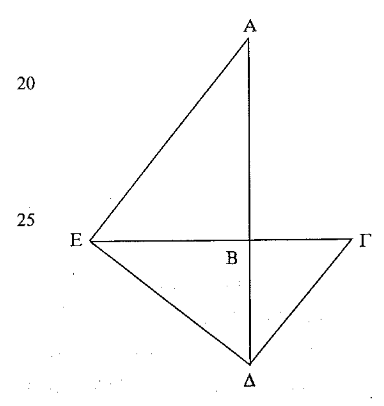
A LA SÍNTESIS DE LA PROPOSICIÓN 1 III 54

Tras asumir esto, una vez que avanzó en el problema mediante el análisis, y concluyendo el análisis en la necesidad de hallar, dadas dos magnitudes, dos medias proporcionales en proporción continua, dice en la síntesis: «Hállense». Pero no 56 encontramos por parte alguna la solución escrita por él; ahora bien, nos hemos topado con escritos de muchos hombres famosos que exponen este problema, entre los cuales rechazamos el escrito de Eudoxo de Cnido, puesto que en el proemio afirma haberlo descubierto mediante líneas curvas mientras que en la demostración no sólo no ha usado las líneas curvas sino que, además, tras hallar una proporción discreta, la usa como si fuera continua, cosa que no era de sospechar no digo ya en Eudoxo, sino en cualquiera de los medianamente versados en geometría. Y para que quede clara la idea de los escritos que nos han llegado de estos hombres escribiré aquí también el modo de resolución de cada uno.

SEGÚN PLATÓN

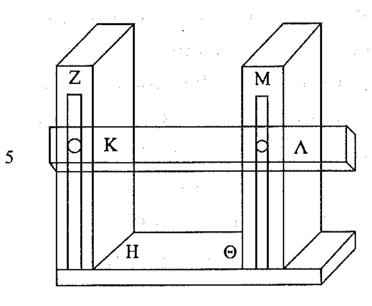
Dadas dos rectas, hallar ⟨entre ellas⟩ dos medias proporcionales en proporción continua.

Sean AB, BΓ las dos rectas dadas, perpendiculares entre sí, entre las cuales hay que hallar dos medias proporcionales.

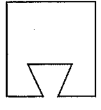


Prolónguense en línea recta hasta Δ, E y constrúyase el ángulo recto ZHΘ, y por un cateto, por ejemplo ZH, muévase la regla KΛ, que está en una ranura ZH, de manera que permanezca paralela a HΘ. Esto ocurrirá si se considera otra reglilla ΘM, paralela a ZH, fijada a ΘH.

Una vez hechas unas ranuras en las caras superiores
58 de ZH, ΘM con muescas acanaladas[1] y dispuestos unos pasadores fijados a KΛ en las ranuras mencionadas, el movimiento de KΛ será siempre paralelo a HΘ.



Tras esta preparación, póngase uno cualquiera de los catetos del ángulo, HΘ, en contacto con Γ y trasládense el ángulo y la regla KΛ hasta que el punto H esté sobre la recta BΔ —manteniéndose el contacto del cateto HΘ con Γ— y hasta que la regla KΛ esté en contacto con la recta BE por el lado de K y con A por el otro extremo, de manera que, como figura en el dibujo, el



[1] Gr. *pelekinoeidésin*: «en forma de pico de pelícano», es decir, «en forma de concavidad alargada». Se trata de un encaje semejante al tipo «cola de milano».

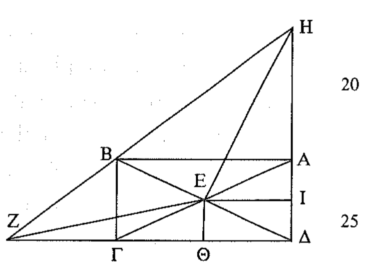
ángulo recto tenga su posición en ΓΔΕ y la regla ΚΛ tenga la posición de ΕΑ.

Una vez hecho esto, tendremos lo propuesto, pues siendo ángulos rectos los de vértice en Δ y Ε, ΓΒ será a ΒΔ como ΔΒ a ΒΕ y como ΕΒ a ΒΑ [*Elem.* VI 8, corol.].

SEGÚN HERÓN EN LA *INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA* Y EN LA *FABRICACIÓN DE INGENIOS DE TIRO*[2]

Sean ΑΒ, ΒΓ dos rectas dadas para las que hay que hallar dos medias proporcionales.

Dispónganse de manera que comprendan un ángulo recto de vértice en Β y complétese el paralelogramo ΒΔ y trácense ΑΓ, ΒΔ. [Es evidente que, siendo iguales, se cortan mutuamente por la mitad, pues el círculo descrito con una de



ellas como diámetro pasará también por los extremos de la **60**
otra por ser rectangular el paralelogramo (*Elem.* III 22)]. Pro-

[2] Eutocio toma el texto de la *Fabricación de ingenios de tiro (Belopoeiká),* añadiendo algunas aclaraciones que Heiberg secluye marcándolas entre corchetes cuadrados. En general, en estos casos, Heiberg no traduce esa parte del texto en su versión latina y nosotros solíamos ofrecer esos pasajes en nota y en cursiva; en este caso, sin embargo, consideramos más conveniente conservarlos entre corchetes cuadrados, puesto que nuestra traducción debe responder al *Comentario* de Eutocio, no a la restitución del original de Herón. Esto, además, permitirá al lector hacerse una idea de cuán libremente «citaban» los antiguos, y hará ver al filólogo con cuána precaución se han de tomar estas «citas». Papo también recoge la solución dada a este problema por Herón, pero con la versión que aparece en la *Introducción a la Mecánica (Mēchanikaì Eisagōgaí).*

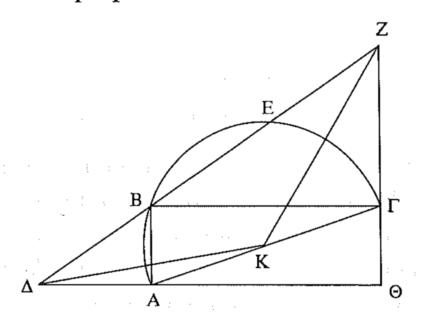
lónguense ΔΓ, ΔΑ [hacia los puntos Z, H] y considérese una reglilla ZBH que se mueve en torno a un pasador que permanece en B, y muévase hasta que corte rectas iguales a partir del punto E, es decir, EH, EZ; y considérese que ya las ha cortado y que tiene la posición de ZBH, siendo iguales, como se ha dicho, EH, EZ. [Desde E trácese EΘ perpendicular a ΓΔ. Es evidente que corta por la mitad a ΓΔ. Puesto que ΓΔ ha sido cortada por la mitad por el punto Θ y se le ha añadido ΓZ, entonces la suma del rectángulo ΔZΓ más el cuadrado de lado ΓΘ es igual al cuadrado de lado ΘZ (*Elem.* II 6). Añádase a ambos el cuadrado de lado EΘ. Entonces la suma del rectángulo ΔZΓ más los cuadrados de lado ΓΘ, ΘE es igual a la suma de los cuadrados de lado ZΘ, ΘE. Y el cuadrado de lado ΓE es igual a la suma de los cuadrados de lados ΓΘ, ΘE, y el cuadrado de lado EZ es igual a la suma de los cuadrados de lados ZΘ, ΘE *(Elem.* I 47)]. Entonces la suma del rectángulo ΔZΓ más el cuadrado de lado ΓE es igual al cuadrado de lado EZ.

De la misma manera se demostrará también que la suma del rectángulo comprendido por ΔHA más el cuadrado de lado AE es igual al cuadrado de lado EH. Y AE es igual a EΓ, y HE igual a EZ. Por tanto el rectángulo ΔZΓ es igual al ΔHA. [Y si el rectángulo comprendido por los extremos es igual al comprendido por los medios, las cuatro rectas están en proporción *(Elem.* VI 16)]. Luego ZΔ es a ΔH como AH es a ΓZ. Pero ZΔ es a ΔH como ZΓ es a ΓB y como BA a AH. [Pues ΓB ha sido trazada paralela a un lado, ΔH, del triángulo ZΔH y AB paralela a ΔZ]. Luego BA es a AH como AH es a ΓZ y como ΓZ a ΓB.

Luego AH, ΓZ son medias proporcionales entre AB, BΓ. [Que es lo que había que hallar].

SEGÚN FILÓN DE BIZANCIO

Sean AB, BΓ las dos rectas dadas entre las cuales hay que hallar dos medias proporcionales.



Dispónganse de manera que comprendan un ángulo recto 62
de vértice en B y una vez trazada AΓ, descríbase en torno a ella el semicírculo ABEΓ y trácense AΔ perpendicular a BA y ΓZ perpendicular a BΓ, y aplíquese en B una regla móvil que corte a AΔ y ΓZ y muévase en torno a B hasta que la recta que va de B a Δ sea igual que la que va de E a Z, es decir, que sea igual a la recta situada entre la circunferencia del círculo y ΓZ. Considérese entonces que la reglilla tiene la posición que tiene ΔBEZ, siendo igual, como se ha dicho, ΔB a EZ.

Digo que AΔ, ΓZ son medias proporcionales entre AB, BΓ.

Considérese que ΔA, ZΓ, han sido prolongadas y se cortan en el punto Θ. Es evidente que, al ser paralelas BA, ZΘ, el ángulo de vértice en Θ es recto y que el círculo AEΓ, una vez completado, pasará también por Θ [*Elem.* III 31]. Puesto que ΔB es igual a EZ, también el rectángulo EΔB es igual al BZE. Pero el rectángulo EΔB es igual al ΘΔA, pues cada uno de

ellos es igual al cuadrado construido sobre la tangente desde Δ [*Elem.* III 36]. Y, por otro lado, el rectángulo ΒΖΕ es igual al ΘΖΓ, pues cada uno de ellos, igualmente, es igual al cuadrado construido sobre la tangente desde Ζ. De manera que también el rectángulo ΘΔΑ es igual al ΘΖΓ; y por esa razón ΔΘ es a ΘΖ como ΓΖ a ΔΑ [*Elem.* VI 16]. Pero ΘΔ es a ΘΖ como ΒΓ a ΓΖ y como ΔΑ es a ΑΒ, puesto que en el triángulo ΔΘΖ ha sido trazada ΒΓ paralela al lado ΔΘ y ΒΑ paralela al lado ΘΖ.

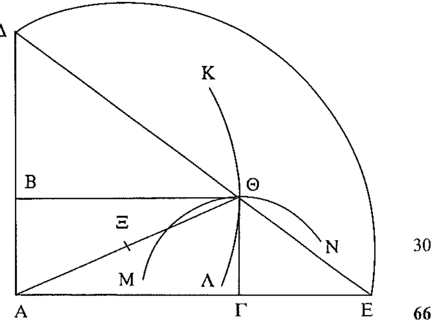
Luego ΒΓ es a ΓΖ como ΓΖ es a ΔΑ y como ΔΑ es a ΑΒ. Que es lo que se había propuesto demostrar.

Se ha de saber que esta construcción es casi la misma
64 que hay en Herón. Pues el paralelogramo ΒΘ es el mismo que se toma en la construcción de Herón, y también los lados prolongados ΘΑ, ΘΓ y la regla móvil fijada en Β. Difiere sólo en una cosa, en que allí movíamos la regla en torno a Β hasta que la regla hiciera iguales las rectas ΚΔ, ΚΖ ⟨que van⟩ desde el punto medio de ΑΓ —es decir, desde Κ— hasta cortarse con ΘΔ, ΘΖ, mientras que aquí ⟨había que moverla⟩ hasta que ΔΒ fuera igual a ΕΖ. De ambas construcciones se sigue lo mismo, pero la que acabamos de mencionar es más conveniente para el uso, puesto que cabe mantener iguales ΔΒ, ΕΖ dividiendo la regla ΔΖ en partes iguales y, por consiguiente, es mucho más fácil que intentar hacer iguales mediante el compás las rectas que van desde el punto Κ hasta Δ y Ζ[3].

[3] Los compases utilizados en la Antigüedad se cerraban automáticamente al levantar las puntas de la superficie en que se apoyaban, y por eso no eran útiles para transportar medidas.

SEGÚN APOLONIO[4]

Sean las dos rectas dadas entre las cuales hay que hallar dos medias proporcionales ΒΑ, ΑΓ, que comprenden un ángulo recto de vértice en Α, y con centro en Β y radio ΑΓ trácese el arco ΚΘΛ y, de nuevo, con centro en Γ y radio ΑΒ trácese el arco ΜΘΝ y corte este último al arco ΚΘΛ en el punto Θ y trácense ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ. Entonces ΒΓ es un paralelogramo y ΘΑ su diagonal.



Córtese por la mitad ΘΑ por el punto Ξ, y con centro en Ξ trácese un círculo que corte las prolongaciones de ΑΒ, ΑΓ en los puntos Δ, Ε, de manera que Δ, Ε estén en línea recta con Θ. Lo cual se conseguirá mo- 66
viendo en torno a Θ una reglilla que corte a ΑΔ y ΑΕ y desplazándola hasta que resulten iguales las rectas que van desde Ξ hasta Δ, Ε.

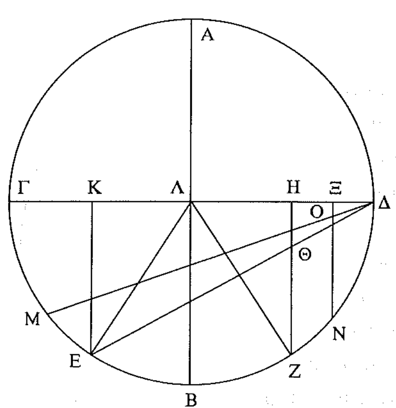
Una vez hecho esto tendremos lo buscado, pues esta misma construcción es la descrita por Herón y Filón y es evidente que valdrá la misma demostración.

[4] No sabemos en qué obra de Apolonio podía estar incluida esta demostración. Papo (III 21) menciona otra solución, mediante cónicas, dada por Apolonio a este mismo problema; cf. *Apollonii quae graece exstant*, ed. Heiberg, II 104 y ss.

SEGÚN DIOCLES EN LOS *ESPEJOS USTORIOS*

En un círculo trácense dos diámetros perpendiculares AB, ΓΔ y tómense dos arcos iguales, uno a cada lado de B, los EB, BZ y por el punto Z trácese ZH paralela a AB y trácese ΔE.

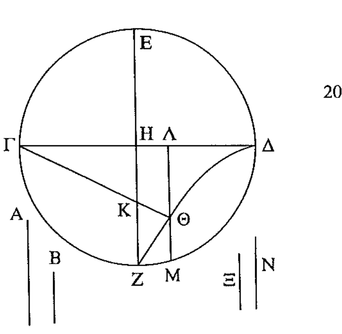
Digo que ZH, HΔ son dos medias proporcionales entre ΓH, HΘ.



Por el punto E trácese EK paralela a AB. Entonces EK es igual a ZH y KΓ igual a HΔ. Esto será evidente una vez trazadas rectas desde Λ hasta E, Z, pues los ángulos comprendidos por ΓΛE, ZΛΔ son iguales [*Elem.* III 26], y los de vértice en K, H son rectos. Luego todos[5] son iguales a todos [*Elem.* I 26] por ser ΛE igual a ΛZ. Y entonces también la recta restante ΓK es igual a HΔ. Y puesto que ΔK es a KE como ΔH es a HΘ mientras que ΔK es a KE como EK a KΓ —pues EK es

[5] Es decir, «los lados y los ángulos de los triángulos KEΛ y HZΛ».

media proporcional de ΔΚ, ΚΓ— entonces ΔΚ es a ΚΕ y ΕΚ a ΚΓ como ΔΗ es a ΗΘ. Y ΔΚ es igual a ΓΗ, ΚΕ igual a ΖΗ y ΚΓ igual a ΗΔ. Entonces ΓΗ es a ΗΖ, como ΖΗ es a ΗΔ y como ΔΗ a ΗΘ. Y si por cada lado de Β se toman los arcos iguales ΜΒ, ΒΝ y por el punto Ν se traza ΝΞ paralela a ΑΒ y se traza 68
ΔΜ, de nuevo ΝΞ, ΞΔ serán medias proporcionales entre ΓΞ, ΞΟ. De este modo, si se trazan más paralelas sucesivas entre Β, Δ y se ponen desde Β hasta Γ arcos iguales a los arcos comprendidos por ellas[6], y desde Δ se trazan rectas hasta los puntos resultantes —semejantes a ΔΕ, ΔΜ—, las paralelas entre Β y Δ quedarán cortadas en algunos puntos —los puntos Ο, Θ en la figura propuesta— y trazando rectas entre ellos mediante la aplicación de una regla, tendremos descrita en el círculo una línea en la cual, si tomamos un punto al azar y por él trazamos una paralela a ΑΒ, la recta trazada y la comprendida por ella desde el diámetro hasta Δ serán medias proporcionales entre la recta comprendida por ella desde el diámetro hasta el punto Γ y la parte de ella que va desde el punto en la línea hasta el diámetro ΓΔ.



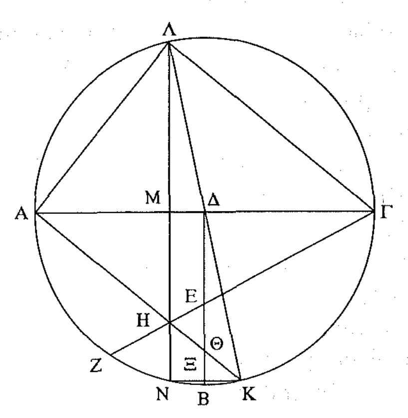
Una vez preparada esta construcción, sean Α, Β las dos rectas dadas para las cuales hay que hallar dos medias proporcionales, y sea un círculo en el que tenemos dos diámetros, ΓΔ, ΕΖ, perpendiculares entre sí, y trácese en él la línea ΔΘΖ mediante puntos sucesivos, como se ha indicado, y sea ΓΗ a ΗΚ como Α a Β, y una vez trazada ΓΚ y prolongada, corte a dicha línea en el punto Θ, y por el punto Θ trácese ΛΜ paralela a ΕΖ.

[6] Es decir, «por las paralelas que se han ido trazando entre Β y Δ».

Por lo indicado más arriba, MA, ΛΔ son medias proporcionales entre ΓΛ, ΛΘ. Y puesto que ΓΛ es a ΛΘ como ΓΗ a ΗΚ y que, por otro lado, ΓΗ es a ΗΚ como Α a Β, si introducimos Ν, Ξ entre Α, Β en la misma proporción que existe entre ΓΛ, ΛΜ, ΛΔ, ΛΘ, habremos tomado Ν, Ξ como medias proporcionales entre Α, Β. Que es lo que había que hallar.

SEGÚN PAPO EN LA *INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA*

Papo propuso hallar un cubo que guardara una razón dada con un cubo dado, y su demostración avanza de acuerdo con esa proposición; y es evidente que, hallado esto, también se ha hallado lo propuesto: pues si, dadas dos rectas, se halla la segunda[7] de las medias requeridas, también vendrá dada de inmediato la tercera.



Trácese, como dice él literalmente, el semicírculo ΑΒΓ, y desde el centro Δ trácese perpendicularmente ΔΒ, y muévase

[7] Es decir, el segundo término en la proporción continua.

una reglilla en torno al punto A de manera que un extremo suyo quede fijo en un pequeño vástago situado en el punto A y la otra parte se mueva entre B y Γ con el vástago como centro.

Construido esto, requiérase hallar dos cubos que guarden entre sí la razón dada.

Trácese BΔ que guarde esa razón con ΔE y, una vez tra- 72
zada ΓE, prolónguese hasta Z. Desplácese la reglilla entre B, Γ hasta que la parte de ella comprendida entre las rectas ZE, EB sea igual a la que queda entre la recta BE y el arco BKΓ. Si hacemos pruebas moviendo la regla lo conseguiremos con facilidad. Hágase y tenga la posición de AK, de modo que HΘ, ΘK sean iguales.

Digo que el cubo de arista BΔ guarda con el cubo de arista ΔΘ la razón requerida, es decir, la de BΔ a ΔE.

Considérese completado el círculo y, una vez trazada KΔ, prolónguese hasta Λ y trácese ΛH. Es paralela a BΔ por ser iguales KΘ a HΘ y KΔ a ΔΛ. Trácense AΛ y ΛΓ. Puesto que el ángulo correspondiente a AΛΓ es recto —pues está en un semicírculo— y ΛM es un cateto, entonces el cuadrado de lado ΛM es al de lado MA —es decir, ΓM es a MA— como el cuadrado de lado AM al cuadrado de lado MH. Añádase en común la razón de AM a MH. Entonces la razón compuesta de la de ΓM a MA y la de AM a MH —es decir, la razón de ΓM a MH— es la misma que la razón compuesta de la del cuadrado de lado AM al de lado MH y la de AM a MH. Pero la razón compuesta de la del cuadrado de lado AM al de lado MH y la de AM a MH es la misma razón que guarda el cubo de arista AM con el de arista MH. Y entonces la razón que guarda ΓM con MH es la misma razón que la que guarda el cubo de arista AM con el cubo de arista MH. Pero ΓM es a MH como ΓΔ a ΔE y, por otro lado, AM es a MH como AΔ a ΔΘ. Y, por
tanto, la razón de BΔ a ΔE —es decir, la razón dada— es la 74
del cubo de arista BΔ al cubo de arista ΔΘ.

Luego de las dos medias proporcionales que había que hallar entre BΔ, ΔE, el segundo término es ΔΘ [*Elem.* V def. 11]. Y si hacemos ahora que ΘΔ sea a otra recta como BΔ a ΔΘ, se habrá hallado también el tercero.

Hay que fijarse también en que esta construcción es la misma que la indicada por Diocles, difiriendo de ella sólo en que aquél traza una línea mediante puntos sucesivos entre A, B, sobre la cual se tomaba el punto H después de prolongar ΓE y de que ésta cortara la línea dicha, mientras que aquí se consigue el punto H al mover la regla AK en torno a A. Nos daremos cuenta de que el punto H es el mismo tanto si se toma como aquí, mediante la regla, como si se hace como dice Diocles por lo siguiente: una vez prolongada MH hasta N, trácese KN. Puesto que KΘ es igual a ΘH y HN paralela a ΘB, también KΞ es igual a ΞN [*Elem.* VI 2]. Y ΞB es común y forma ángulos rectos, pues KN es cortada por la mitad y perpendicularmente por la recta que pasa por el centro [*Elem.* III 3]; y entonces la base es igual a la base [*Elem.* I 4], y por eso también el arco KB es igual al arco BN [*Elem.* III 28].

Por tanto, el punto H es el que está en la línea de Diocles, y la demostración es la misma. Pues Diocles decía que ΓM es a MN como MN a MA y como AM a MH[8]. Por otro lado, NM es igual a MΛ, pues el diámetro la corta perpendicularmente [*Elem.* III 3]. Entonces ΓM es a MΛ como ΛM a MA y como AM es a MH. Por tanto, ΛM, MA son medias proporcionales entre ΓM, MH. Pero por un lado ΓM es a MH como ΓΔ a ΔE, y por otro, ΓM es a MΛ como AM a MH, es decir, como ΓΔ

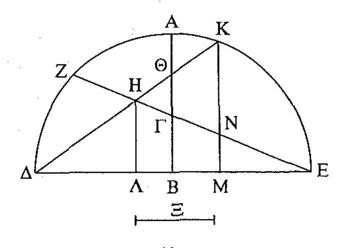
[8] Eutocio acomoda la proporción mencionada por DIOCLES (68, 27) a la figura de Papo.

a ΔΘ. Y entonces de las dos medias entre ΓΔ, ΔΕ, la segunda es ΔΘ[9], que es también la que obtuvo Papo.

SEGÚN ESPORO 76

Sean ΑΒ, ΒΓ las dos rectas desiguales dadas. Hay que hallar dos medias proporcionales entre ΑΒ y ΒΓ en proporción continua.

Desde Β trácese ΔΒΕ perpendicular a ΑΒ, y con centro en Β y radio ΒΑ trácese el semicírculo ΔΑΕ y, una vez trazada una recta que una Ε con Γ, prolónguese hasta Ζ, y desde Δ trácese una recta tal que ΗΘ sea igual a ΘΚ —pues es posible—[10]. Y desde Η, Κ trácense ΗΛ, ΚΝΜ perpendiculares a ΔΕ.



Y puesto que ΚΘ es a ΘΗ como ΜΒ a ΒΛ y, por otro lado, ΚΘ es igual a ΘΗ, entonces también ΜΒ es igual a ΒΛ. De manera que también la restante, ΜΕ, es igual a ΛΔ. Y, por tanto, toda la recta ΔΜ es igual a ΛΕ y por eso ΜΔ es a ΔΛ como ΛΕ a ΕΜ. Pero ΜΔ es a ΔΛ como ΚΜ a ΗΛ y, por otra parte, ΛΕ es a ΕΜ como ΗΛ a ΝΜ. A la vez, dado que ΔΜ es a ΜΚ como ΚΜ es a ΜΕ [*Elem.* V def. 10], entonces ΔΜ es a ΜΕ como el cuadrado de lado ΔΜ al cuadrado de lado ΜΚ, es decir, como el cuadrado de lado ΔΒ es al cuadrado de lado ΒΘ; es decir, como el cuadrado de lado ΑΒ al de lado ΒΘ, pues ΔΒ es igual a ΒΑ. A la vez, puesto que ΜΔ es a ΔΒ como ΑΕ a ΕΒ, mientras que ΜΔ es a ΔΒ como ΚΜ a ΘΒ y, por otro

[9] Es decir, el segundo término en la proporción continua.

[10] Con ayuda de una regla, como en los casos anteriores.

lado, ΛΕ es a ΕΒ como ΗΛ a ΓΒ, entonces ΚΜ es a ΘΒ como ΗΛ a ΓΒ. Y tomando la proporción en alternancia, ΚΜ es a ΗΛ como ΘΒ es a ΓΒ. Pero ΚΜ es a ΗΛ como ΜΔ a ΔΛ, es de-
78 cir, como ΔΜ a ΜΕ; es decir, como el cuadrado de lado ΑΒ es al cuadrado de lado ΘΒ. Y por tanto, el cuadrado de lado ΑΒ es al cuadrado de lado ΘΒ como ΒΘ a ΒΓ. Tómese Ξ, media proporcional entre ΘΒ, ΒΓ. Entonces, puesto que el cuadrado de lado ΑΒ es al cuadrado de lado ΒΘ como ΘΒ a ΒΓ mientras que el cuadrado de lado ΑΒ guarda con el cuadrado de lado ΒΘ una razón que es el cuadrado de la que guarda ΑΒ con ΒΘ y, por otro lado, ΘΒ guarda con ΒΓ una razón que es el cuadrado de la que guarda ΘΒ con Ξ [*Elem.* V def. 10], entonces ΑΒ es a ΒΘ como ΒΘ a Ξ; pero ΘΒ es a Ξ como Ξ es a ΒΓ; y por tanto, ΑΒ es a ΒΘ como ΘΒ es a Ξ y como Ξ es a ΒΓ.

Es evidente que ésta es la misma que la redactada por Papo y Diocles.

SEGÚN MENECMO

Sean Α, Ε las dos rectas dadas; hay que hallar dos medias proporcionales entre Α, Ε.

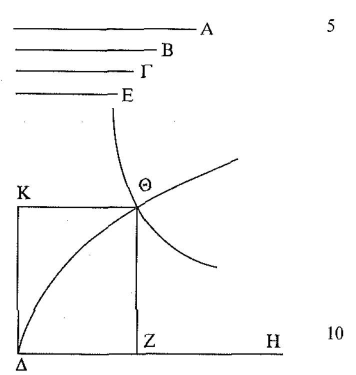
Dése por hecho y sean Β, Γ, y trácese en una posición determinada la recta ΔΗ con un extremo en Δ y desde Δ trácese ΔΖ igual a Γ y trácese perpendicularmente ΖΘ y sea ΖΘ igual a Β. Puesto que Α, Β, Γ son proporcionales, el rectángulo comprendido por Α, Γ es igual al cuadrado de lado Β. Por tanto, el rectángulo comprendido por la recta dada Α y por Γ —es decir, por ΔΖ— es igual al cuadrado de lado Β, es decir, al cuadrado de lado ΖΘ. Entonces el punto Θ está en una parábola trazada[11] pasando por Δ [*Cón.* I 11]. Trácense las pa-

[11] Cf. la glosa al final de la segunda demostración atribuida a MENECMO (84, 8-11).

ralelas ΘK, ΔK. Y puesto que ha sido dado el rectángulo comprendido por B, Γ —pues es igual al comprendido por A, E— entonces también ha sido dado el rectángulo KΘZ. Entonces Θ está en una hipérbola de asíntotas KΔ, ΔZ [*Cón.* II 12]. Luego el punto Θ ha sido dado; de manera que también ha sido dado Z.

La síntesis será del modo siguiente:

Sean A, E las rectas dadas, y ΔH una recta dada en determinada posición con un extremo en Δ, y trácese una parábola que pase por Δ, cuyo eje sea ΔH y A su parámetro; y sean los cuadrados de las ordenadas perpendiculares a ΔH iguales a las áreas aplicadas a A que tengan por anchura las abscisas cortadas por ellas desde Δ [*Cón.* I 52]. Trácese y sea ΔΘ[12], y sea ΔK perpendicular[13], y con asíntotas KΔ, ΔZ trácese una hipérbola en la cual las rectas que se tracen paralelas a KΔ, ΔZ formen un área igual al rectángulo comprendido por A, E [*Cón.* II 5].



Cortará[14] a la parábola; córtela en el punto Θ, y trácense las perpendiculares ΘK, ΘZ. Puesto que el cuadrado de lado ZΘ es igual al rectángulo comprendido por A, ΔZ [*Cón.* I 11], entonces A es a ZΘ como ZΘ es a ZΔ. A la vez, puesto que el rectángulo comprendido por A, E es igual al ΘZΔ, entonces A es a ZΘ como ZΔ es a E. Pero A es a ZΘ como ZΘ es a ZΔ. Y por tanto A es a ZΘ como ZΘ es a ZΔ y como ZΔ es a E. Cons-

[12] Entiéndase «la parábola descrita».

[13] «Perpendicular al eje ΔH», se entiende.

[14] Entiéndase «la hipérbola trazada».

trúyase entonces B igual a ΘZ y Γ igual a ΔZ. Entonces A es a B como B es a Γ y como Γ es a E.

Luego A, B, Γ, E están en proporción continua. Que es lo que había que hallar.

82 DE OTRA MANERA

Sean AB, BΓ las dos rectas dadas perpendiculares entre sí y sean las medias entre ellas ΔB, BE de manera que ΓB sea a BΔ como BΔ a BE y como BE a BA, y trácense perpendiculares ⟨entre sí⟩ ΔZ, EZ.

Puesto que ΓB es a BΔ como ΔB a BE, entonces el rectángulo ΓBE —es decir, el comprendido por la recta dada[15] y BE— es igual al cuadrado de lado BΔ, es decir, al cuadrado de lado EZ. Puesto que el rectángulo comprendido por la recta dada[16] y BE es igual al cuadrado de lado EZ, entonces Z toca[17] a la parábola de eje BE. A la vez, puesto que AB es a BE como BE a BΔ, entonces el rectángulo comprendido por ABΔ —es decir, el comprendido por la recta dada[18] y BΔ— es igual al cuadrado de lado EB —es decir, al cuadrado de lado ΔZ—. Por tanto, Z toca a la parábola de eje BΔ; y también toca a otra parábola dada de eje BE. Luego el punto Z ha sido dado. Y ZΔ, ZE son perpendiculares. Luego los puntos Δ, E han sido dados.

La síntesis será del modo siguiente:

---

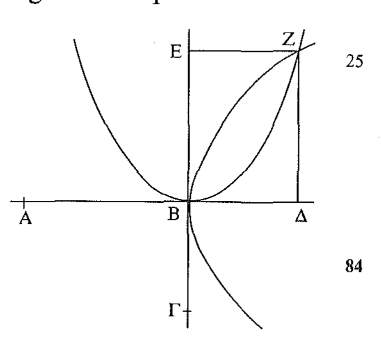
[15] Una de las rectas dadas en el enunciado, es decir, ΓB.

[16] Como antes, se refiere a la recta ΓB.

[17] La terminología actual preferiría decir que el punto «está en la parábola» o que «pertenece a la parábola».

[18] Se refiere a la recta dada AB.

Sean AB, BΓ las dos rectas dadas perpendiculares entre sí, y prolónguense indefinidamente a partir de B y trácese una parábola de eje BE de manera que el cuadrado de las ordenadas hasta BE sea igual a las áreas aplicadas a BΓ[19]. Y de nuevo trácese una parábola de eje ΔB de manera que el cuadrado de las ordenadas[20] sea igual a las aplicadas a AB.



Las parábolas se cortarán entre sí. Córtense en el punto Z y desde Z trácense las perpendiculares ZΔ, ZE. Puesto que ZE —esto es, ΔB— es una ordenada de la parábola, entonces el rectángulo ΓBE es igual al cuadrado de lado BΔ 84 [*Cón.* I 11]. Por tanto, ΓB es a BΔ como ΔB a BE. A la vez, puesto que ZΔ —esto es, EB— es una ordenada de la parábola, entonces el rectángulo ΔBA es igual al cuadrado de lado EB. Por tanto ΔB es a BE como BE a BA. Pero ΔB es a BE como ΓB a BΔ.

Luego ΓB es a BΔ como BΔ a BE y como EB es a BA. Que es lo que había que hallar.

[La parábola se traza mediante el compás inventado por Isidoro de Mileto el Mecánico, nuestro maestro, descrito por él en el *Comentario* que preparó para el *Sobre los hornos* de Herón][21].

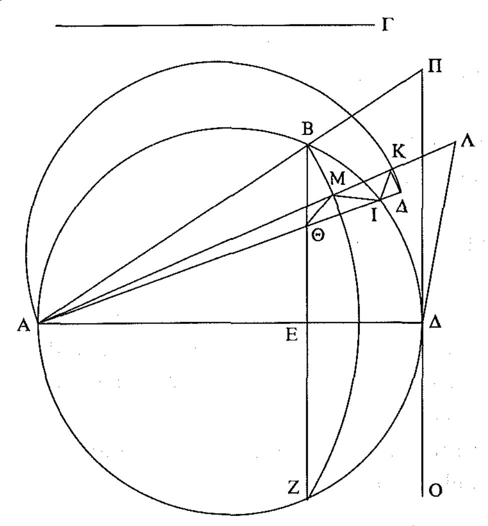
[19] Es decir, que BΓ sea el parámetro.

[20] Es decir, «hasta el eje AB».

[21] Heiberg, y con él los comentaristas posteriores, consideran un añadido el pasaje entre corchetes. Suele identificarse al Isidoro de Mileto mencionado con el famoso arquitecto de Santa Sofía. Cf. Introducción, págs. 74-75.

SOLUCIÓN DE ARQUITAS, SEGÚN LO TRANSMITE EUDEMO

Sean AΔ, Γ las dos rectas dadas. Hay que hallar dos medias proporcionales entre AΔ, Γ.



Trácese el círculo ABΔZ con la recta mayor A, Δ como diámetro y aplíquese la línea AB igual a Γ[22] y al prolongarla corte en el punto Π a la tangente al círculo en el punto Δ, y trácese BEZ paralela a ΠΔO y considérese un semicilindro recto con base en el semicírculo ABΔ y sobre la línea AΔ un semicírculo perpendicular[23] situado en el paralelogramo del

[22] Aunque la expresión no es clara, el sentido se hace evidente a la vista de la figura.

[23] Entiéndase «perpendicular al plano del círculo».

semicilindro. Al desplazarse este semicirculo partiendo de Δ hacia Β mientras el extremo Α del diámetro permanece fijo, en su desplazamiento cortará la superficie cilíndrica y trazará en ella una línea. A la vez, por otro lado, si permaneciendo fija ΑΔ se hace girar el triángulo ΑΠΔ con un movimiento contrario al del semicírculo, producirá una superficie cónica mediante la recta ΑΠ; la cual[24], al haber girado, coincidirá con la superficie cilíndrica en algún punto. A la vez, también el punto Β describirá un semicírculo en la superficie del cono. Tenga el semicírculo transportado una posición ΔΚΑ en el lugar de corte de las líneas y tenga el triángulo 86
transportado en sentido opuesto la posición ΔΛΑ, y sea Κ el punto del corte indicado, y sea ΒΜΖ el semicírculo trazado pasando por Β, y sea ΒΖ la sección común entre éste y el círculo ΒΔΖΑ y desde el punto Κ trácese una perpendicular al plano del semicírculo ΒΔΑ. Caerá sobre la circunferencia del círculo por tratarse de un cilindro recto. Caiga, y sea ΚΙ, y una vez trazada una recta desde Ι hasta Α, llegue a cortar a la recta ΒΖ en el punto Θ, y corte ΑΛ al semicírculo ΒΜΖ en el punto Μ, y trácense las rectas ΚΔ, ΜΙ, ΜΘ.

Puesto que cada uno de los semicírculos ΔΚΑ, ΒΜΖ es perpendicular al plano propuesto, entonces también su sección común ΜΘ es perpendicular al plano del círculo. De manera que ΜΘ también es perpendicular a ΒΖ. Luego el rectángulo ΒΘΖ —es decir, el comprendido por ΑΘΙ— es igual al cuadrado de lado ΜΘ. Luego el triángulo ΑΜΙ es semejante a cada uno de los triángulos ΜΙΘ, ΜΑΘ, y el ángulo correspondiente a ΙΜΑ es recto. Y también el correspondiente a ΔΚΑ es recto. Luego las rectas ΚΔ, ΜΙ son paralelas, y ΔΑ es a ΑΚ en proporción —es decir, ΚΑ es a ΑΙ— como ΙΑ es a ΑΜ por la semejanza de triángulos. Por tanto,

[24] Es decir, la recta ΑΠ actuando como generatriz.

las cuatro rectas ΔA, AK, AI, AM están en proporción conti-
88 nua. Y AM es igual a Γ, puesto que también es igual a AB.

Luego dadas dos rectas AΔ, Γ, han sido halladas dos medias proporcionales AK, AI.

SEGÚN ERATÓSTENES

Eratóstenes al rey Ptolomeo, salud.

Cuentan que uno de los poetas trágicos antiguos puso en escena a Minos que estaba haciendo construir un sepulcro para Glauco, y al enterarse de que medía cien pies por todos lados, decía:

Escaso recinto señalaste para una tumba real;
que sea el doble y, sin que pierda en belleza,
al punto duplica cada miembro del sepulcro.

Pero pareció que se había equivocado, pues al duplicar los lados la planta se vuelve el cuádruple y el volumen ocho veces más. Y se anduvo buscando entre los geómetras de qué manera sería alguien capaz de duplicar un volumen dado manteniendo la misma forma, y a tal problema se le dio el nombre de «duplicación del cubo», pues intentaban duplicarlo tomando un cubo como hipótesis. Durante mucho tiempo estuvieron todos sin saber qué camino tomar, e Hipócrates de Quíos fue el primero al que se le ocurrió que si se hallaba el medio de tomar dos medias proporcionales en proporción continua entre dos líneas rectas, de las cuales la mayor fuera el doble de la menor, el cubo quedaría duplicado, de modo que una dificultad se convirtió en otra dificultad no menor.

Y cuentan que, un tiempo después, unos delios que ha- **90**
bían recibido del oráculo la orden de duplicar uno de los altares, fueron a dar en la misma dificultad, y pensaron que si mandaban traer a los geómetras de la Academia de Platón ellos les hallarían lo buscado. Éstos se entregaron con interés a la tarea e investigaron cómo tomar dos medias proporcionales entre dos rectas dadas, y se dice que Arquitas de Tarento las halló recurriendo a los semicilindros, y Eudoxo recurriendo a las llamadas líneas curvas.

Mas a todos les ocurrió que lo escribieron al modo científico, pero no fueron capaces de ponerlo por obra y llevarlo al uso, excepto Menecmo en pequeña medida y con dificultades. Pero a uno de nosotros[25] se le ha ocurrido un medio instrumental sencillo gracias al cual hallaremos no sólo dos medias proporcionales entre dos rectas dadas, sino cuantas sean requeridas. Tras este hallazgo, podremos cubicar en general cualquier sólido dado contenido por paralelogramos o pasar de una forma a otra y hacer una figura semejante y aumentarla conservando la semejanza[26] y hacerlo también con altares y templos. Y podremos también cubicar las medidas de líquidos y sólidos —me refiero a medidas como el metreta o el medimno[27]— y calcular, mediante la arista, cuánto alcanza su capacidad. La idea será útil también para quienes quieran hacer mayores las catapultas o los ingenios para lanzar proyectiles. Porque es preciso agrandarlo todo en proporción: los grosores y los tamaños y los orificios y

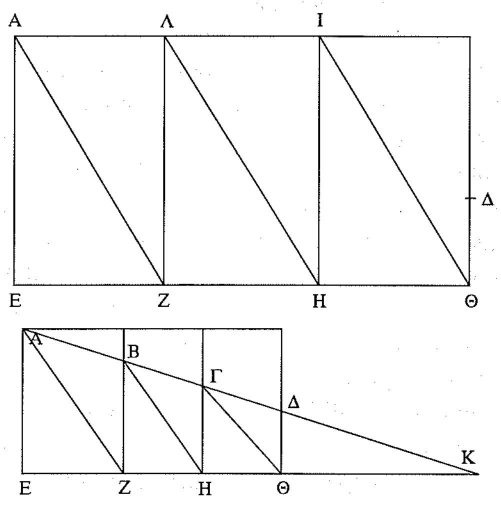
[25] Indefinido y plural de modestia: en realidad quiere decir «a mí».

[26] Había sido un problema tradicional desde los pitagóricos el de construir figuras iguales en superficie a otra figura dada y semejantes en su forma a otra también dada. Los ejemplos para las figuras planas pueden verse en EUCLIDES, *Elementos* I 44 y 45.

[27] Medidas de capacidad, equivalente la primera a algo más de 39 litros y la segunda a algo menos de 52.

las tuercas y las correas que van insertadas, si se quiere aumentar el proyectil en proporción, y esto no es posible hacerlo sin el descubrimiento de las medias proporcionales. La demostración y la construcción del instrumento dicho te la he puesto por escrito.

Sean dadas dos rectas desiguales AE, ΔΘ, entre las cuales hay que hallar dos medias proporcionales en proporción continua.



92 Trácese AE perpendicularmente a una recta cualquiera EΘ y constrúyanse sobre EΘ tres paralelogramos AZ, ZI, IΘ uno a continuación del otro y trácense en ellos las diagonales AZ, ΛH, IΘ. Éstas serán paralelas. Permaneciendo fijo el paralelogramo de en medio ZI, pliéguese AZ sobre el de enmedio y IΘ por debajo, como en la segunda figura, hasta que los puntos A, B, Γ, Δ estén en línea recta, y por los puntos A, B, Γ, Δ trácese una recta, y corte en K a la prolongación de EΘ.

Y AK será a KB, entre las paralelas AE, ZB, como EK a KZ y, entre las paralelas AZ, BH, como ZK a KH. Por tanto AK será a KB como EK a KZ y como KZ a KH. A la vez, puesto que BK es a KΓ, entre las paralelas BZ, ΓH, como ZK a KH y, entre las paralelas BH, ΓΘ, como HK a KΘ, entonces BK es a KΓ como ZK a KH y como HK es a KΘ. Pero ZK es a KH como EK a KZ. Y por tanto EK es a KZ como ZK es a KH y como HK es a KΘ. Pero EK es a KZ como AE a BZ, y ZK es a KH como BZ a ΓH, y HK es a KΘ como ΓH a ΔΘ. Por tanto AE es a BZ como BZ a ΓH y como ΓH a ΔΘ.

Luego han sido halladas BZ y ΓH, dos medias proporcionales de AE, ΔΘ.

Por consiguiente, esto ha quedado demostrado para el caso de las superficies geométricas; para que podamos también tomar las dos medias instrumentalmente se fija una estructura de madera o de marfil o de bronce que tenga tres tablillas iguales lo más finas posible, de las cuales la del 94
centro esté encajada y las otras dos puedan correr por entalladuras; de tamaño y proporciones, como cada uno considere conveniente, puesto que la demostración se llevará a cabo del mismo modo. Para obtener las líneas con la suficiente precisión hay que tener cuidado de que al mover las tablillas permanezcan todas paralelas y bien fijadas y sujetas uniformemente entre sí[28].

En la ofrenda votiva el instrumento es de bronce y está fijado bajo la propia corona de la estela sujeto mediante plomo fundido, y debajo de él está la demostración explicada brevemente y la figura, y a continuación de ella un epigrama. Que te lo escriban también para que lo tengas como

[28] Más adelante, en la solución de Nicomedes, también éste manifiesta que lo tiene por impracticable.

en la ofrenda. De las dos figuras, la segunda está inscrita en la estela[29].

Dadas dos rectas, hallar dos medias proporcionales en proporción continua.

Dense las rectas AE, ΔΘ. Muevo las tablillas del instrumento hasta que los puntos A, B, Γ, Δ estén en línea recta. Considérese que es como está en la segunda figura. Entonces AK es a KB, entre las paralelas AE, BZ, como EK a KZ y, entre las paralelas AZ, BH, como ZK a KH. Por tanto, EK es a KZ como KZ a KH, y éstas son entre sí como AE es a BZ y como BZ a ΓH. Del mismo modo demostraremos que ZB es a
96 ΓH como ΓH a ΔΘ. Por tanto, AE, BZ, ΓH, ΔΘ están en proporción. Por tanto se han hallado las dos medias de las dos rectas dadas.

Y si las rectas dadas no fueran iguales a AE, ΔΘ, haciendo que AE, ΔΘ sean proporcionales a ellas tomaremos las medias y las trasladaremos a aquéllas, y habremos llevado a cabo lo requerido. Y si se pide hallar más medias, dispondremos siempre en el instrumento una tablilla más que las medias que hay que tomar. La demostración es ésta[30]:

Esto tienes a mano, amigo, si de un cubo pequeño con-
[seguir
pretendes el doble, o transformarlo en otra cualquier figura
[sólida,
y también si midieras de este modo un recinto o un silo
o la cóncava cavidad de un pozo cuando tomes las concu-
[rrencias medias

[29] Figura a continuación la descripción de la construcción y uso del instrumento que PAPO *(Synagōgḗ* III 21) designa con el nombre de *mesólabo,* «tomamedias».

[30] Lo que sigue es el epigrama en dísticos elegíacos considerado fragmento auténtico de Eratóstenes.

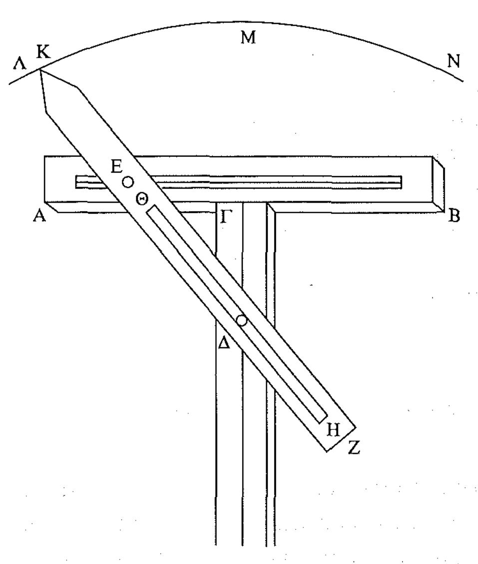
entre los límites extremos dentro de cánones dobles.
Y no intentes comprender las intrincadas tareas de los cilin-
[dros
de Arquitas ni los triples cortes del cono de Menecmo
ni lo que en sus líneas describe la curva figura del divino
[Eudoxo,
pues en estas tablillas hallarás fácilmente miles de medias
aun partiendo de pobre inicio.
¡Padre feliz, Ptolomeo, porque con tu hijo disfrutas de la
Todo cuanto agrada a las Musas y a los reyes [edad!
tú mismo a tu hijo regalaste. Y lo de después, Uranio Zeus,
ojalá lo guíe el cetro de tu mano.
Esto, así suceda, y al ver la ofrenda, que alguien diga:
esto es obra del cireneo Eratóstenes.

SEGÚN NICOMEDES EN LAS *LÍNEAS CONCOIDES* 98

Describe Nicomedes en el tratado que tituló *Sobre las líneas concoides* la construcción de un instrumento que cumple el mismo fin, del cual se precia mucho el autor, haciendo gran mofa de los hallazgos de Eratóstenes, que tiene al tiempo por impracticables y por carentes de valor geométrico. De lo que ha quedado de sus trabajos sobre el problema añadimos en lo posible a lo ya escrito, para su comparación con Eratóstenes, lo que él describió así:

Hay que considerar dos reglas unidas entre sí perpendicularmente de tal manera que nos ofrezcan una superficie, como están las reglas AB, ΓΔ, y que en AB haya una muesca acanalada por la que pueda correr una cabecilla, y en ΓΔ por la parte de Δ y de la recta que corta por la mitad su anchura, un cilindro pequeño que forma cuerpo con la regla y que

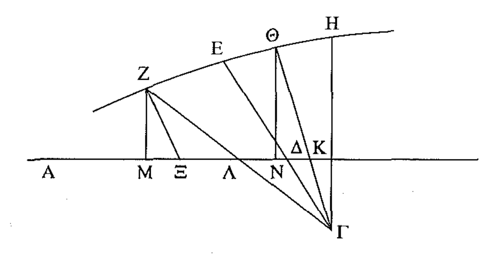
sobresale un poco de la cara superior de la regla, y otra regla EZ que presente a lo largo, a poca distancia del extremo Z, un corte de arriba a abajo HΘ capaz de abrazar el cilindro pequeño de Δ, y en E un orificio redondo que queda dentro de la muesca acanalada que hay en la regla AB al que pueda



ir a parar un vástago que forma cuerpo con la cabecilla que puede correr. Una vez encajada la regla EZ por un lado en el corte alargado HΘ, en el cilindrito de Δ, y por otro en el orificio E mediante el vástago que forma cuerpo con la cabecilla, si uno toma el extremo K de la regla y lo mueve hacia la parte de A y luego hacia la de B, el punto E se desplazará siempre por la regla AB, y el corte alargado HΘ se moverá siempre sobre el cilindro de Δ, considerando que la recta que hay en medio de la regla EZ pasará siempre en su movimiento por el eje del cilindro de Δ y que el exceso EK de la regla permanece siempre igual. Si consideramos en-

tonces fijado en K un estilete que toca el suelo, éste describirá una línea ΛMN a la que Nicomedes llama la primera línea concoide, y llama radio[31] de la línea a la magnitud EK de la regla, y al punto Δ, polo.

Demuestra que es propiedad de esta línea el transcurrir cada vez más cerca de la regla AB, y que si entre la línea y la regla AB se traza una recta, ésta, en cualquier caso, corta la línea.



La primera de estas propiedades es fácilmente comprensible en otro dibujo: considerando la regla AB, el punto Γ el polo, ΔE el radio, y ZEH una línea concoide, trácense desde Γ las dos rectas ΓΘ, ΓZ, siendo, naturalmente, iguales KΘ, ΛZ.

Digo que la perpendicular ZM es menor que la perpendicular ΘN.

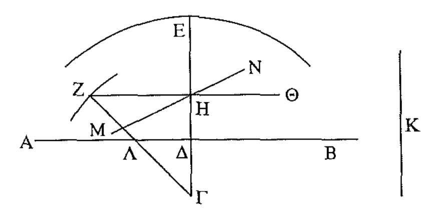
Siendo mayor el ángulo correspondiente a MΛΓ que el correspondiente a NKΓ, entonces el ángulo restante que falta para los dos rectos, el correspondiente a MΛZ, es menor que el restante, el correspondiente a NKΘ, y por esa razón, siendo rectos los ángulos de vértice en M, N, será mayor el de vértice en Z que el de vértice en Θ. Y si construimos el ángulo MZΞ igual al de vértice en Θ, entonces KΘ —es decir, ΛZ— guardará con ΘN la misma razón que ΞZ con ZM; de 102

[31] En griego, *diástēma,* lit. «distancia», que se emplea a veces para designar el radio de una circunferencia.

manera que ZΛ guarda con ΘN una razón menor que con ZM, y por esa razón ΘN es mayor que ZM.

La segunda propiedad era que la recta trazada entre AB y la línea corta a la línea. Y eso se hace comprensible así:

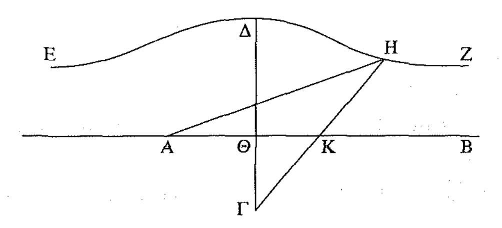
La recta trazada es paralela a AB o no.



Sea primero paralela, como ZHΘ, y hágase ΔH a HΓ como ΔE a otra recta K y con centro en Γ y radio K, corte el arco trazado a la línea ZH en el punto Z, y trácese ΓZ. Entonces ΔH es a HΓ como AZ a ZΓ. Pero ΔH es a HΓ como ΔE a K —es decir, a ΓZ—. Por tanto ΔE es igual a AZ. Lo cual es imposible. Luego el punto Z está en la línea.

Y ahora, no sea paralela la recta trazada, y sea MHN, y trácese ZH paralela a AB por el punto H. Entonces ZH cortará a la línea. De modo que mucho más lo hará MN.

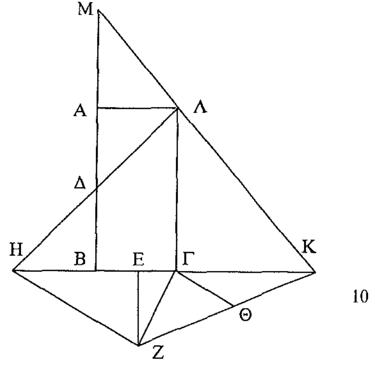
Siendo estos los resultados obtenidos mediante el instrumento, su utilidad para el fin propuesto se demuestra así:



De nuevo, dado el ángulo A y un punto exterior Γ, ⟨haya que⟩ prolongar ΓH y hacer KH igual a la recta dada.

Trácese desde el punto Γ la recta ΓΘ perpendicular a AB y prolónguese, y sea ΔΘ igual a la recta dada y con Γ como polo, la recta dada ΔΘ como radio y la regla AB, trácese una 104
línea concoide primera, EΔZ.

Por lo demostrado anteriormente, AH la corta: córtela en el punto H y trácese ΓH; entonces KH será igual a la recta dada.



Demostrado esto[32], dense las dos rectas ΓΛ, ΛA perpendiculares entre sí entre las cuales hay que hallar dos medias proporcionales en proporción continua, y complétese el paralelogramo ABΓΛ, y córtense por la mitad cada una de las rectas AB, BΓ por los puntos Δ, E y una vez trazada ΔΛ prolónguese y corte a la prolongación de ΓB en el punto H y ⟨trácese⟩ EZ perpendicular a BΓ y trácese ΓZ que sea igual a AΔ, y trácese ZH y paralela a ella ΓΘ y siendo KΓΘ un ángulo, constrúyase ZΘK en un punto dado Z, haciendo ΘK igual a AΔ o a ΓZ —que esto es posible se demostró mediante la concoide—. Y una vez trazada, prolónguese KΛ y corte a la prolongación de AB en el punto M.

Digo que ΓΛ es a KΓ como KΓ es a MA y como MA es a AΛ.

Puesto que BΓ ha sido cortada en dos partes iguales por el punto E y a esa recta se le ha añadido la KΓ, entonces el

[32] La solución de Nicomedes que sigue nos ha sido transmitida también, con muy pocas variantes textuales, por Papo, III 24, 58-64 y III 42, 246-250.

rectángulo BKΓ más el cuadrado de lado ΓE es igual al cuadrado de lado EK. Añádase a ambos el cuadrado de lado EZ. Entonces la suma del rectángulo BKΓ más los cuadrados de lado ΓE, EZ —es decir, el cuadrado de lado ΓZ— es igual a los cuadrados de lado KE, EZ —es decir, al cuadrado de
106 lado KZ—. Y puesto que MA es a AB como MΛ a ΛK y, por otro lado, MΛ es a ΛK como BΓ a ΓK, entonces MA es a AB como BΓ a ΓK. Y AΔ es la mitad de AB, y ΓH el doble de BΓ —puesto que ΛΓ es también el doble de ΔB—. Entonces también MA será a AΔ como HΓ a KΓ. Pero HΓ es a ΓK como ZΘ a ΘK [*Elem.* VI 2], por ser HZ, ΓΘ paralelas. Y entonces por composición [*Elem.* VI 18] MΔ es a ΔA como ZK a KΘ. Pero se ha supuesto que AΔ es igual a ΘK, puesto que AΔ también es igual a ΓZ. Entonces también MΔ es igual a ZK. Por tanto el cuadrado de lado MΔ también es igual al cuadrado de lado ZK. Y la suma del rectángulo BMA más el cuadrado de lado ΔA es igual al cuadrado de lado MΔ [*Elem.* II 6]; y se había demostrado que era igual al cuadrado de lado ZK la suma del rectángulo BKΓ más el cuadrado de lado ΓZ, ya que el cuadrado de lado AΔ es igual al cuadrado de lado ΓZ —pues se ha supuesto que AΔ es igual a ΓZ—. Por tanto el rectángulo BMA es igual al rectángulo BKΓ. Por tanto MB es a BK como KΓ es a AM; pero BM es a BK como ΓΛ es a ΓK; por tanto, ΛΓ es a ΓK como KΓ a AM, y también ΛΓ es a ΓK como MA a AΛ [*Elem.* VI 4]; luego ΛΓ es a ΓK como ΓK a AM y como AM a AΛ.

EUTOCIO

UNA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TERCER GRADO

(DEL COMENTARIO AL LIBRO II DE «SOBRE LA ESFERA Y EL CILINDRO»)

En efecto, se ha de cortar la recta dada ΔZ *por el punto* III 130 *X y hacer que* XZ *sea a la recta dada —esto es, a* $Z\Theta$*— como la magnitud dada —esto es, el cuadrado de lado* $B\Delta$*— es al cuadrado de lado* ΔX*.*

Enunciado de modo absoluto exige un diorismo, pero si se añaden las condiciones que tenemos aquí —esto es, que ΔB *sea el doble de* BZ *y que* BZ *sea mayor que* $Z\Theta$*, como en el análisis—, no requiere diorismo. Y el problema será el siguiente: Dadas dos rectas* ΔB*,* BZ *y siendo doble* ΔB *que* BZ *y dado un punto* Θ *en la recta* BZ*, cortar* ΔB *por el punto* X *y hacer que el cuadrado de lado* ΔB *sea al cuadrado de lado* ΔX *como* XZ *es a* $Z\Theta$*. De cada una de estas cuestiones se darán al final el análisis y la síntesis*[1].

Prometió que demostraría lo recién indicado al final, pero no es posible hallar lo prometido en ninguno de los manuscritos. De ahí que hayamos encontrado que Dionisodoro, no pudiendo dar con la resolución, incapaz de aplicarse al lema que falta, llevó el problema entero por otro camino que expondremos a continuación. También Diocles, en el libro que compuso sobre los *Espejos ustorios*, considerando que Arquímedes lo había prometido pero no había cumplido su promesa, intentó suplirlo él mismo, y expondremos a conti-

[1] El texto comentado aquí por Eutocio pertenece a *Esf. y cil.* II 4 (Heiberg, vol. I, 190, 22-192, 6).

nuación su intento, pues tampoco tiene nada que ver con lo que se omite, sino que, igual que Dionisodoro, planteó el problema mediante otra demostración.

132 Y también en un libro antiguo —pues en mucho tiempo no abandoné la investigación— me topé con unos teoremas escritos con no poca falta de claridad por causa de las incorrecciones y con muy variados errores en las figuras, pero que contenían el fundamento de lo que se investigaba y que, por otro lado, conservaban en parte el dialecto dorio habitual en Arquímedes y estaban escritos con la terminología usual de la Antigüedad, llamando a la parábola «sección de un cono rectángulo» y a la hipérbola «sección de un cono obtusángulo», de lo que nació la sospecha de que podría ser lo mismo que se había prometido escribir al final. Por ello, leyéndolo con mucha atención y hallando difícil el propio texto tal y como está escrito por causa, como se ha dicho, de la cantidad de faltas, extrayendo poco a poco las ideas, lo escribo en un lenguaje más corriente y más claro en la medida de lo posible.

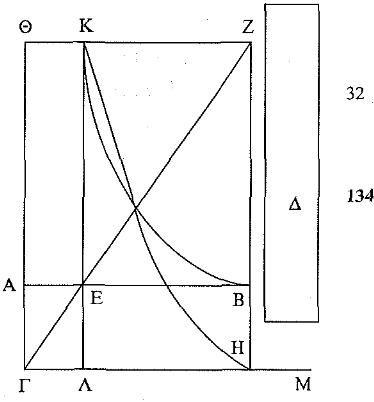
Escribiré completo el primer teorema para que quede claro lo que en él se dice sobre las determinaciones, pues luego se aplicará también en el problema en la parte del análisis.

⟨ANÁLISIS⟩[2]

Dada una recta AB y otra AΓ y un área Δ, propóngase tomar un punto E en la recta AB de manera que AE sea a AΓ como el área Δ al cuadrado de lado EB.

[2] Los subtítulos entre corchetes no figuran en los mss. ni en la edición de Heiberg, sino que son adición nuestra.

Dese por hecho, y trácese AΓ perpendicular a AB, y una vez trazada ΓE divídase por la mitad por el punto Z, y por el punto Γ trácese ΓH paralela a AB, y por el punto B y paralela a AΓ trácese ZBH que corte a cada una de las rectas ΓE, ΓH y complétese el paralelogramo HΘ, y por el punto E trácese KEΛ paralela a cualquiera de las rectas ΓΘ, HZ, y sea el rectángulo ΓHM igual a Δ.



Puesto que EA es a AΓ
como Δ al cuadrado de lado
EB y, por otro lado, EA es a 32
AΓ como ΓH a HZ y, por otra
parte, ΓH es a HZ como el
cuadrado de lado ΓH al rec- **134**
tángulo ΓHZ, entonces el cuadrado de lado ΓH es al rectángulo ΓHZ como Δ al cuadrado de lado EB, es decir, al cuadrado de lado KZ. Y tomando la proporción en alternancia [*Elem.* V 16], el cuadrado de lado ΓH es a Δ —es decir, al rectángulo ΓHM— como el rectángulo ΓHZ al cuadrado de lado ZK. Pero el cuadrado de lado ΓH es al rectángulo ΓHM como ΓH a HM; y por tanto ΓH es a HM como el rectángulo ΓHZ al cuadrado de lado ZK. Pero si tomamos HZ como altura común, ΓH es a HM como el rectángulo ΓHZ es al rectángulo MHZ; luego el rectángulo ΓHZ es al rectángulo MHZ como el rectángulo ΓHZ al cuadrado de lado ZK; por tanto, el rectángulo MHZ es igual al cuadrado de lado ZK. Por tanto, si se traza una parábola de eje ZH y que pase por H de manera que el cuadrado de las ordenadas equivalga al rectángulo aplicado a HM[3], pasará también por K y habrá si-

[3] Es decir, «de manera que HM sea su parámetro».

do dada en posición por haber sido dada en magnitud HM [*Datos* 57] que junto con la recta dada HΓ contiene la superficie dada Δ. Entonces el punto K es tangente a la parábola dada en posición. Trácese pues[4] según se ha dicho, y sea HK.

A la vez, puesto que el área ΘΛ es igual al área ΓB [*Elem.* I 43], es decir, el rectángulo ΘKΛ al rectángulo ABH, si por el punto B se traza una hipérbola de asíntotas ΘΓ, ΓH, pasará por el punto K según la recíproca del teorema 8 del libro II de los *Elementos de las cónicas* de Apolonio[5], y habrá sido dada en posición por haber sido dada también la posición de cada una de las rectas ΘΓ, ΓH y haber sido dado también en posición el punto B. Trácese[6] según se ha dicho y sea KB.

Entonces el punto K en posición será tangente a la hipérbola dada en posición; y también era tangente a la parábola dada en posición. Luego el punto K ha sido dado [*Datos* 25].
136 Y de él parte la recta KE, perpendicular a la recta AB dada en posición. Luego el punto E ha sido dado [*Datos* 30]. Así, puesto que la recta EA es a la recta dada AΓ como el área dada Δ al cuadrado de lado EB, dos sólidos, cuyas bases son el cuadrado de lado EB y el área Δ y cuyas alturas son EA, AΓ, tienen las bases inversamente proporcionales a las alturas; de modo que los sólidos son iguales [*Elem.* XI 34].

Luego el sólido construido sobre el cuadrado de lado EB con altura EA es igual al construido sobre el área dada Δ con la altura dada ΓA.

Pero el sólido construido sobre el área BE con altura EA es el mayor de todos los que se pueden construir semejantes a él con altura BA cuando BE sea el doble de EA, según se

[4] «La parábola», se entiende.

[5] En nuestros mss. y ediciones, II 12.

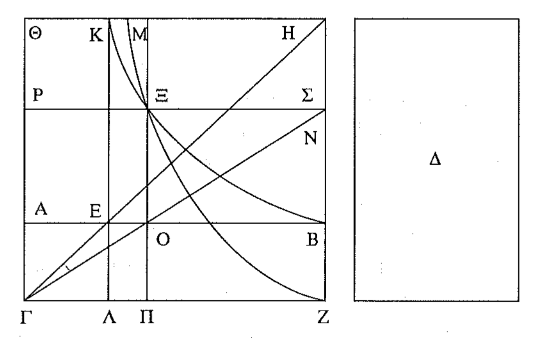
[6] «La hipérbola», hay que entender.

demostrará[7]. Por consiguiente es preciso que el sólido construido sobre la superficie dada y con la altura dada no sea mayor que el de base BE y altura EA.

⟨SÍNTESIS⟩

La síntesis procederá del modo siguiente:

Sea AB la recta dada y AΓ otra recta dada y Δ el área dada y sea necesario cortar AB de manera que uno de sus segmentos sea a la recta dada AΓ como el área dada Δ al cuadrado construido sobre el segmento restante.



Tómese AE que sea la tercera parte de AB; entonces el sólido de base Δ y altura AΓ o bien es mayor, o igual, o menor que el de base en el cuadrado de BE y altura EA.

Así, si es mayor, no será posible la síntesis del problema, como quedó demostrado en el análisis[8]; si es igual, el punto E resolverá el problema, pues al ser iguales los sóli-

[7] Ver más adelante el *Lema al análisis,* 141, 21 y ss.

[8] En el *Lema al análisis,* para ser precisos.

dos, las bases son inversamente proporcionales a las alturas, y EA es a AΓ como el área Δ al cuadrado de lado BE.

Y si el sólido de base Δ y altura AΓ es menor que el de base en el cuadrado de lado BE y altura EA, la síntesis procederá así:

Trácese AΓ perpendicular a AB, y por el punto Γ trácese
138 ΓZ paralela a AB, y por el punto B y paralela a AΓ trácese BZ, y corte ésta a la prolongación de ΓE en el punto H y complétese el paralelogramo ZΘ y trácese KEΛ paralela a ZH por el punto E.

Puesto que el sólido de base Δ y altura AΓ es menor que el de base en el cuadrado de BE y altura EA, entonces EA es a AΓ como Δ a un área menor que el cuadrado de lado BE, es decir, menor que el cuadrado de lado HK. Sea pues EA a AΓ como Δ al cuadrado de lado HM, y sea el rectángulo ΓZN igual a Δ. Entonces, puesto que EA es a AΓ como Δ —es decir, el rectángulo ΓZN— al cuadrado de lado HM, mientras que EA es a AΓ como ΓZ a ZH y, por otro lado, ΓZ es a ZH como el cuadrado de lado ΓZ es al rectángulo ΓZH, entonces también el cuadrado de lado ΓZ es al rectángulo ΓZH como el rectángulo ΓZN es al cuadrado de lado HM. Y lo mismo tomando la proposición en alternancia [*Elem.* V 16]: el cuadrado de lado ΓZ es al rectángulo ΓZN como el rectángulo ΓZH al cuadrado de lado HM. Pero el cuadrado de lado ΓZ es al rectángulo ΓZN como ΓZ a ZN y, por otro lado, ΓZ es a ZN, tomando ZH como altura común, como el rectángulo ΓZH al rectángulo NZH; y, por tanto, el rectángulo ΓZH es al rectángulo NZH como el rectángulo ΓZH al cuadrado de lado HM. Luego el cuadrado de lado HM es igual al rectángulo HZN. Por tanto, si trazamos por el punto Z una parábola de eje ZH de manera que el cuadrado de las ordenadas equivalga al rectángulo aplicado a ZN[9], pasará por el punto M [*Cón.* I 11].

---

[9] Es decir, «de parámetro ZN».

Trácese y sea ΜΞΖ. Y puesto que el rectángulo de diagonal ΘΛ es igual al rectángulo de diagonal ΑΖ [*Elem.* I 43] —es decir, el rectángulo ΘΚΛ igual al rectángulo ΑΒΖ—, si por el punto Β y con asíntotas ΘΓ, ΓΖ trazamos una hipérbola, pasará por el punto Κ según la recíproca del teorema 8 de los *Elementos de las cónicas* de Apolonio[10]. Trácese y sea 140 ΒΚ que corte a la parábola en el punto Ξ, y desde el punto Ξ trácese ΞΟΠ perpendicular a ΑΒ, y trácese ΡΞΣ paralela a ΑΒ por el punto Ξ.

Puesto que ΒΞΚ es una hipérbola y ΘΓ, ΓΖ sus asíntotas, y que ΡΞ, ΞΠ han sido trazadas paralelas a ΑΒ, ΒΖ, entonces el rectángulo ΡΞΠ es igual al rectángulo ΑΒΖ [*Cón.* II 12]. De manera que el cuadrado ΡΟ es igual al rectángulo ΟΖ. Por tanto, si se traza una recta desde Γ hasta Σ, pasará por Ο [*Elem.* I 43, recíp.]. Pase, y sea ΓΟΣ. Puesto que ΟΑ es a ΑΓ como ΟΒ a ΒΣ [*Elem.* VI 4] —es decir, como ΓΖ a ΖΣ— y, por otro lado ΓΖ es a ΖΣ, si se toma ΖΝ como altura común, como el rectángulo ΓΖΝ al rectángulo ΣΖΝ, también, por tanto, ΟΑ será a ΑΓ como el rectángulo ΓΖΝ al rectángulo ΣΖΝ. Y por un lado, el área Δ es igual al rectángulo ΓΖΝ y, por otro, el cuadrado de lado ΣΞ —es decir, el cuadrado de lado ΒΟ— es igual al rectángulo ΣΖΝ, por la parábola [*Cón.* I 11]. Entonces ΟΑ es a ΑΓ como el área Δ al cuadrado de lado ΒΟ.

Luego se ha tomado el punto Ο que resuelve el problema.

⟨LEMA AL ANÁLISIS⟩

Que si ΒΕ es el doble de ΕΑ el sólido con base en el cuadrado de ΒΕ y altura ΕΑ es el mayor de todos los que se pueden tomar semejantes a él con altura ΒΑ se demostrará así:

---

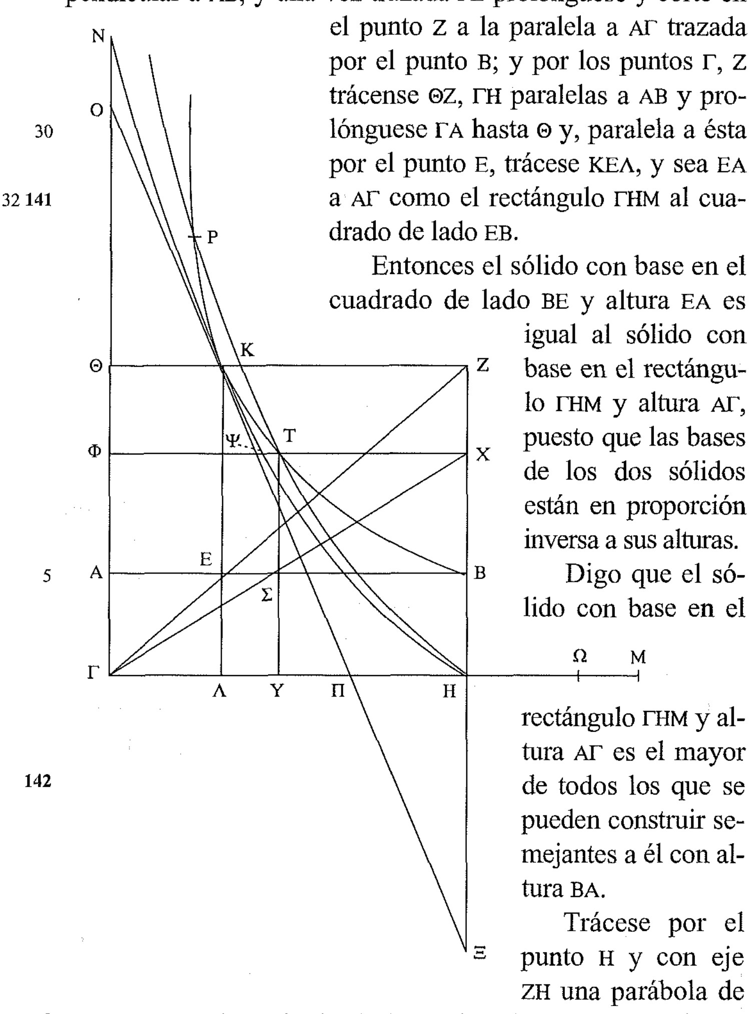
[10] En nuestros mss. y ediciones, II 12.

Sea de nuevo, como en el análisis, dada una recta AΓ perpendicular a AB, y una vez trazada ΓE prolónguese y corte en el punto Z a la paralela a AΓ trazada por el punto B; y por los puntos Γ, Z trácense ΘZ, ΓH paralelas a AB y prolónguese ΓA hasta Θ y, paralela a ésta por el punto E, trácese KEΛ, y sea EA
32 141 a AΓ como el rectángulo ΓHM al cuadrado de lado EB.

Entonces el sólido con base en el cuadrado de lado BE y altura EA es igual al sólido con base en el rectángulo ΓHM y altura AΓ, puesto que las bases de los dos sólidos están en proporción inversa a sus alturas.

Digo que el sólido con base en el rectángulo ΓHM y altura AΓ es el mayor
142 de todos los que se pueden construir semejantes a él con altura BA.

Trácese por el punto H y con eje ZH una parábola de manera que el cuadrado de las ordenadas equivalga al rectángulo aplicado a HM. Pasará por K, como se ha demostrado



en el análisis, y al prolongarla cortará a la recta ΘΓ que es paralela al diámetro de la sección[11] por la proposición 27 del libro I de los *Elementos de las cónicas* de Apolonio[12]. Prolónguese, y córtense en el punto Ν, y por el punto Β y con asíntotas ΝΓ, ΓΗ trácese una hipérbola. Como se ha dicho en el análisis, pasará por el punto Κ. Pase como ΒΚ, y constrúyase ΗΞ como prolongación de ΖΗ e igual a ella[13], y trácese ΞΚ y prolónguese hasta Ο.

Entonces es evidente que es tangente a la parábola por la recíproca de la proposición 14 del libro I de los *Elementos de las cónicas* de Apolonio[14]. Puesto que ΒΕ es el doble de ΕΑ, pues así se ha supuesto —es decir, ΖΚ el doble de ΚΘ—, y que el triángulo ΟΘΚ es semejante al triángulo ΞΖΚ, entonces también ΞΚ es el doble de ΚΟ; y por otro lado, ΞΚ es el doble de ΚΠ porque también ΞΖ es el doble de ΞΗ y porque ΠΗ es paralela a ΚΖ; por tanto, ΟΚ es igual a ΚΠ; por tanto ΟΚΠ, al ser tangente a la hipérbola y estar entre las asíntotas, es cortada por la mi- 144
tad; luego es tangente a la hipérbola por la recíproca de la proposición 3 del libro II de los *Elementos de las cónicas* de Apolonio. Y también era tangente a la parábola en el mismo punto Κ; luego la parábola es tangente a la hipérbola en el punto Κ.

Así pues, considérese también la hipérbola prolongada hasta Ρ, y tómese en la recta ΑΒ un punto al azar Σ, y por el punto Σ trácese ΤΣΥ paralela a ΚΛ y corte[15] a la hipérbola en el punto Τ, y por el punto Τ trácese ΦΤΧ paralela a ΓΗ.

Puesto que el rectángulo ΦΥ es igual al ΓΒ por la hipérbola y las asíntotas [*Cón.* II 12], si les restamos en común el rectángulo ΓΣ, el rectángulo ΦΣ es igual al ΣΗ, y por esa razón, la recta trazada desde Γ hasta Χ pasará por el punto Σ. Pase y sea ΓΣΧ. Y puesto que el cuadrado de lado ΨΧ es

[11] Entiéndase: «paralela al eje de la parábola

[12] En nuestros mss. y ediciones, I 26.

[13] Traduzco libremente el texto transmitido por los manuscritos en el sentido de la corrección propuesta por Heiberg.

[14] En nuestros mss. y ediciones, I 33.

[15] Entiéndase: «corte ΤΣΥ».

igual al rectángulo XHM por la parábola [*Cón.* I 11], el cuadrado de lado TX es menor que el rectángulo XHM.

Sea entonces el rectángulo XHΩ igual al cuadrado de lado TX.

Entonces, puesto que ΣA es a AΓ como ΓH a HX, mientras que ΓH es a HX, si tomamos como altura común HΩ, como el rectángulo ΓHΩ al rectángulo XHΩ y como al cuadrado de lado XT, que es igual a él —es decir, al cuadrado de lado BΣ— entonces el sólido de base en el cuadrado de lado BΣ y altura ΣA es igual al sólido de base en el rectángulo ΓHΩ y altura ΓA. Y el sólido de base en el rectángulo ΓHΩ y altura ΓA es menor que el sólido de base en el rectángulo ΓHM y altura ΓA.

Luego el sólido de base en el cuadrado de lado BΣ y altura ΣA es menor que el sólido de base en el cuadrado de lado BE y altura EA.

De la misma manera se demostrará también para todos los puntos tomados entre E, B.

146 Pero tómese ahora entre E, A un punto ς.

Digo que también así el sólido de base en el cuadrado de lado BE y altura EA es mayor que el sólido de base en el cuadrado de lado Bς y altura ςA.

Con las mismas construcciones, trácese por el punto ς la recta ϘςP paralela a KΛ, y corte a la hipérbola por el punto P —la cortará por ser paralela a la asíntota [*Cón.* II 13]— y una vez trazada por el punto P la recta A′PB′ paralela a AB, corte a la prolongación de HZ en el punto B′.

Y puesto que de nuevo, por la hipérbola [*Cón.* II 12], el rectángulo Γ′Ϙ es igual al rectángulo AH, la recta trazada desde Γ hasta B′ pasará por el punto ς. Pase, y sea ΓςB′. Y de nuevo, por la parábola [*Cón.* I 11], el cuadrado de lado A′B′ es igual al rectángulo B′HM, luego el cuadrado de lado PB′ es menor que el rectángulo B′HM. Sea el cuadrado de lado PB′ igual al rectángulo B′HΩ.

Así, puesto que ςA es a AΓ como ΓH a HB′ mientras que ΓH es a HB′ —si tomamos HΩ como altura común— como el rectángulo ΓHΩ es al rectángulo B′HΩ —es decir, como al cuadrado de lado PB′; es decir, como al cuadrado de lado Bς— entonces el sólido de base en el cuadrado de lado Bς y altura ςA es igual al sólido de base en el rectángulo ΓHΩ y altura ΓA. Y el rectángulo ΓHM es mayor que el rectángulo ΓHΩ; luego el sólido con base en el cuadrado de lado BE y altura EA también es mayor que el sólido con base en el cuadrado de lado Bς y altura ςA. Y se demostrará de la misma manera para el caso de todos los puntos tomados entre E, A; y se había demostrado para el caso de todos los puntos tomados entre E, B.

Luego el sólido con base en el cuadrado de lado BE y altura EA es el mayor de todos los que pueden tomarse de manera semejante con altura AB cuando BE sea el doble de EA.

* * *

148 También hay que saber lo que se sigue de la construcción indicada: puesto que se ha demostrado que el sólido de base en el cuadrado de BΣ y altura ΣA y el sólido de base en el cuadrado de lado Bς y altura ςA son menores que el sólido de base en el cuadrado de lado BE y altura EA, también es posible, dado un sólido de base en un área dada con una altura dada que sea menor que el sólido de base en el cuadrado de lado BE y altura EA, resolver el problema del principio si se corta la recta AB en dos puntos[16].

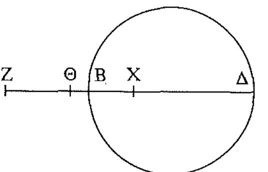
Esto ocurre si consideramos trazada una parábola de diámetro XH de manera que el cuadrado de las ordenadas equivalga al rectángulo aplicado a HΩ. Tal parábola pasa necesariamente por el punto T [*Cón* I 11]. Y puesto que por fuerza ha de cortar a la recta ΓN paralela a su diámetro [*Cón.* I 26], es evidente que también corta a la hipérbola por otro punto por encima de K, como aquí en el punto P, y una vez trazada una perpendicular desde P a AB, como aquí Pς, corta por el punto ς a AB, de manera que el punto ς resuelve el problema, y el sólido con base en el cuadrado de lado BΣ y altura ΣA es igual al sólido de base en el cuadrado de lado Bς y altura ςA, como queda claro por las demostraciones anteriores.

De modo que, puesto que es posible tomar dos puntos en la recta BA que resuelvan el problema investigado, cabe tomarlo, según quiera uno, o bien entre E, B o bien entre E, A. Pues si se toma el punto entre E, B, como se ha dicho, trazada la parábola que pasa por los dos puntos H, T, que corta a la

[16] Es decir, que el problema tiene dos soluciones posibles, una, cortando la recta AB entre los puntos E, A y otra, entre E, B, como aclara más adelante.

hipérbola por dos puntos, el uno, más próximo a H —es decir, al eje de la parábola— servirá para hallar el punto entre E, B, como aquí T sirve para hallar Σ; el otro, más lejano, servirá para hallar el punto entre E, A, como aquí P sirve para hallar ς.

De esta manera, el problema se ha sometido a análisis y **150**
síntesis de modo general. Para acomodarlo también a las palabras de Arquímedes, considérese, como en la propia construcción de lo expuesto, ΔB el diámetro de la esfera, BZ el radio, y ZΘ la recta dada[17].



Dice: *Por tanto, hemos llegado a cortar la recta ΔZ por el punto X, de manera que XZ sea a la recta dada como el área dada al cuadrado de lado ΔX. Pero esto que se ha dicho de modo absoluto conlleva un diorismo*[18]. Pues si el sólido construido con base en el área dada y con la recta dada por altura fuera mayor que el sólido con base en el cuadrado de lado ΔB y altura BZ, el problema sería imposible de resolver, como se ha demostrado, mientras que si fuera igual, el punto B resolvería el problema, y entonces no tendría nada que ver con lo planteado por Arquímedes al principio, pues la esfera no quedaría cortada en la razón dada. Luego lo que se había dicho de modo absoluto requería un diorismo. Pero añadidos los requisitos que figuran aquí —a saber, que ΔB sea el doble de ZB y que BZ sea mayor que ZΘ— entonces no exige el diorismo: pues el sólido dado de base en el cuadrado de lado ΔB y de altura dada ZΘ es menor que el sólido con base en el cuadrado de lado ΔB y altura BZ, por ser BZ mayor que ZΘ; y si eso se da, hemos demostrado que es posible resolverlo y cómo se avanza en el problema.

[17] Remite a la figura de *Esf. cil.* II 4, pág. 213.

[18] *Esf. cil.* II 4, 190, 26-29.

Hay que hacer notar que lo dicho por Arquímedes concuerda con nuestro análisis. Pues al principio hace una afirmación después de su análisis general diciendo a lo que ha llegado: *Hay que cortar la recta dada ΔZ por el punto X, y hacer que XZ sea a la recta dada como el área dada al cuadrado de lado ΔX*[19]. Y luego, tras expresarse así, como lo di-
152 cho de manera general requiere un diorismo, pero añadiendo los requerimientos descubiertos por él —a saber, que la recta ΔB sea el doble de BZ y que BZ sea mayor que ZΘ— no requiere el diorismo, toma de nuevo una parte del problema y dice: *El problema será de esta manera: dadas dos rectas ΔB, BZ y siendo ΔB el doble de BZ y dado un punto Θ en la recta BZ, cortar ΔB por el punto X*[20], no diciendo ya, como antes, que haya que cortar ΔZ, sino ΔB, porque él sabía, como hemos demostrado nosotros más arriba, que son dos los puntos que se pueden tomar en ΔZ y resuelven el problema, uno entre Δ, B y otro, entre B, Z, de los cuales el que está entre Δ, B era el que servía para lo que el proponía al principio.

Esto lo hemos escrito con claridad en la medida de lo posible siguiendo las palabras de Arquímedes. Pero puesto que, como dijimos antes, al no poder encontrar Dionisodoro en modo alguno los escritos prometidos por Arquímedes para el final, y faltándole recursos para hallar lo que estaba sin exponer, fue por otro camino y redactó una manera de resolución del problema entero no falta de gracia, y creimos que necesariamente era menester añadirla a ésta, corrigiéndola en lo posible. Pues también ésta, por el gran descuido de la gente, presentaba la mayor parte de las demostraciones embrolladas por la multitud de errores en todas las copias que hemos encontrado.

[19] *Esf. cil.* II 4, 190, 22-25.

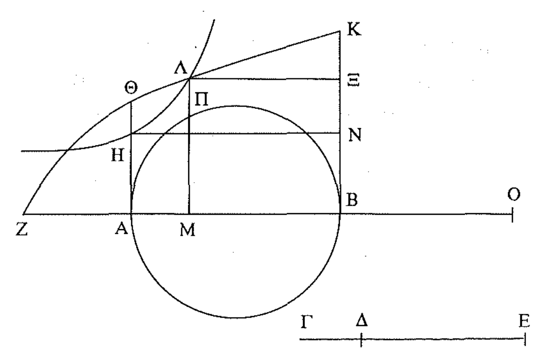
[20] *Esf. cil.* II 4, 190, 29 y ss.

SEGÚN DIONISODORO

Cortar la esfera dada mediante un plano de manera que sus segmentos guarden entre sí la razón dada.

Sea la esfera dada, cuyo diámetro es AB, y la razón dada la que guarda ΓΔ con ΔE. 154

Hay que cortar la esfera mediante un plano perpendicular a AB de manera que el segmento con vértice en A guarde con el segmento con vértice en B la razón que guarda ΓΔ con ΔE.



Prolónguese BA hasta Z, y sea AZ la mitad de AB, y guarde ZA con AH la razón de ΓE a EΔ, y sea AH perpendicular a AB y tómese AΘ como media proporcional de ZA, AH; entonces, AΘ es mayor que AH. Y con eje ZB y por el punto Z trácese una parábola de manera que el cuadrado de las ordenadas equivalga al rectángulo aplicado a AH. Por tanto, pasará por el punto Θ, puesto que el rectángulo ZAH es igual al cuadrado de lado AΘ [*Cón.* I 11]. Trácese pues y sea ZΘK, y por el punto B constrúyase BK paralela a AΘ, y corte a la

parábola en el punto K; y por el punto H, con asíntotas ZB, BK, trácese una hipérbola. Cortará a la parábola entre los puntos Θ, K[21]. Córtela en Λ, y desde Λ trácese ΛM perpendicular a AB, y por los puntos H, Λ trácense HN, ΛΞ paralelas a AB.

Puesto que HΛ es una hipérbola y las rectas AB, BK son sus asíntotas y las rectas MΛ, ΛΞ son paralelas a AH, HN, entonces el rectángulo AHN es igual al rectángulo MΛΞ, por la proposición 8 del Libro II de los *Elementos de las cónicas* de Apolonio[22]. Pero HN es igual a AB y ΛΞ igual a MB; luego el rectángulo ΛMB es igual al rectángulo HAB y por ser igual el rectángulo comprendido por los extremos que el comprendido por los medios, las cuatro rectas están en proporción [*Elem.* VI 16]. Luego ΛM es a HA como AB a BM; y por tanto, el cuadrado de lado ΛM es al cuadrado de lado HA
156 como el cuadrado de lado AB al de lado BM. Y puesto que por la parábola [*Cón.* I 11] el cuadrado de lado ΛM es igual al rectángulo comprendido por ZM, AH, entonces ZM es a MΛ como MΛ a AH [*Elem.* VI 17]. Entonces, la primera es a la tercera como el cuadrado de la primera es al cuadrado de la segunda [*Elem.* V, def. 10] y como el cuadrado de la segunda es al cuadrado de la tercera. Luego ZM es a AH como el cuadrado de lado ΛM es al cuadrado de lado HA. Pero se había demostrado que el cuadrado de lado ΛM es al cuadrado de lado AH como el cuadrado de lado AB al de lado BM. Por tanto, el cuadrado de lado AB es al cuadrado de lado BM como la recta ZM a la recta AH. Pero el cuadrado de lado AB es al cuadrado de lado BM como el círculo cuyo radio es igual a AB es al círculo cuyo radio es igual a BM [*Elem.* XII 2]. Por tanto, el círculo cuyo radio es igual a AB es al círculo cuyo radio es igual a BM como la recta ZM es a la recta AH.

---

[21] Heiberg lo justifica diciendo que «caerá por dentro de H y no pasará por fuera de la asíntota BK.

[22] En nuestros mss. y ediciones, II 12.

Luego el cono que tiene por base el círculo cuyo radio es igual a AB y por altura AH es igual al cono que tiene por base el círculo cuyo radio es igual a BM y por altura ZM. Y puesto que en estos conos las bases son inversamente proporcionales a las alturas, los conos son iguales [*Esf. cil.* I, lema 4 post 16]. Pero el cono que tiene por base el círculo cuyo radio es igual a AB y por altura ZA es al cono que tiene la misma base y por altura AH como la recta ZA a la recta AH, es decir, como ΓE a EΔ, puesto que si están sobre la misma base son entre sí como sus alturas [*Esf. cil.* I, lema 1, post. 16]. Y entonces el cono que tiene por base el círculo cuyo radio es igual a AB y por altura ZA es al cono que tiene por base el círculo cuyo radio es igual a BM y por altura ZM como la recta ΓE a la recta EΔ. Pero el cono que tiene por base el círculo cuyo radio es igual a AB y por altura ZA es igual a la esfera [*Esf. cil.* I 34], mientras que el cono que tiene por base el círculo cuyo radio es igual a BM y por altu- 158
ra ZM es igual al segmento de la esfera cuyo vértice es B y su altura BM, como se demostrará a continuación. Por tanto, la esfera guarda con el segmento indicado la razón de ΓE a EΔ. Y por descomposición [*Elem.* V 17], el segmento cuyo vértice es A y su altura AM guarda con el segmento cuyo vértice es B y su altura BM la razón que guarda ΓΔ con ΔE.

Luego, prolongado el plano perpendicular a AB que pasa por AM, corta a la esfera en la razón dada. Que es lo que había que hacer.

⟨LEMA⟩

Que el cono que tiene por base el círculo cuyo radio es igual a BM y por altura ZM es igual al segmento de la esfera cuyo vértice es B y su altura BM se demostrará así.

Sea ZM a MA como OM a MB. Entonces el cono que tiene la misma base que el segmento y por altura OM es igual al segmento [*Esf. cil.* II 2]. Y puesto que ZM es a MA como OM a MB, también, tomando la proporción en alternancia [*Elem.* V 16], ZM es a MO como AM a MB; pero AM es a MB como el cuadrado de lado ΠM es al cuadrado de lado MB, y el cuadrado de lado ΠM es al cuadrado de lado MB como el círculo cuyo radio es igual a ΠM al círculo cuyo radio es igual a MB [*Elem.* XII 2], luego el círculo cuyo radio es igual a ΠM es al círculo cuyo radio es igual a MB como MZ a MO [*Esf. cil.* I, lema 1, post. 16]. Por tanto, el cono que tiene por base el círculo cuyo radio es igual a MB y por altura ZM es igual al cono que tiene por base el círculo cuyo radio es igual a ΠM y
160 por altura MO, pues sus bases son inversamente proporcionales a sus alturas.

De modo que también es igual al segmento.

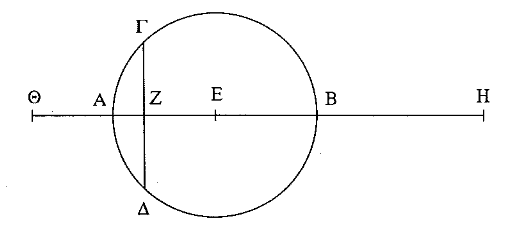
SEGÚN DIOCLES EN LOS *ESPEJOS USTORIOS*

También Diocles, a modo de prólogo, escribe esto en los *Espejos ustorios*:

En el tratado *Sobre la esfera y el cilindro,* Arquímedes demostró que todo segmento de esfera es igual a un cono que tiene la misma base que el segmento y por altura una recta que guarda con la perpendicular trazada desde el vértice del segmento hasta su base una razón que es la que guarda la suma del radio de la esfera más la altura del otro segmento con la altura del otro segmento [*Esf. cil.* II 2].

Por ejemplo, si ABΓ fuera la esfera y fuera cortada por el plano del círculo de diámetro ΓΔ y, siendo el diámetro AB y el centro E, hiciéramos que la suma de EA, ZA fuera a ZA

como HZ a ZB y, además, que la suma de EB, BZ fuera a ZB como ΘZ a ZA, está demostrado que el segmento ΓBΔ de la esfera es igual al cono cuya base es el círculo de diámetro ΓΔ y su altura ZH, y que el segmento ΓAΔ es igual al cono cuya base es la misma y su altura ΘZ.



Tras haber propuesto él cortar la esfera dada mediante un plano, de manera que los segmentos de la esfera guardaran entre sí la razón dada, y una vez llevada a cabo la construcción indicada, dice: *Luego ha sido dada la razón entre el cono cuya base es el círculo de diámetro ΓΔ y su altura ZΘ con el cono cuya base es la misma y su altura ZH*[23], pues
también esto se había demostrado: los conos que están sobre 162
las mismas bases son entre sí como sus alturas [*Esf. cil.* I, lema 1, post. 16]. Luego ha sido dada la razón de ΘZ a ZH. Y puesto que ΘZ es a ZA como la suma de EB, BZ a ZB, por descomposición [*Elem.* V 17] ΘA será a AZ como EB a ZB. Y por la misma razón, también HB será a ZB como esa misma recta[24] a ZA.

Por tanto, el problema resulta ser éste: dada en posición una recta AB y dados dos puntos A, B y dada la recta EB, cortar la recta AB por el punto Z y añadir las rectas ΘA, BH de manera que ΘZ guarde con ZH la razón dada y que además ΘA sea a AZ como la recta dada a ZB, y que HB sea a BZ co-

[23] *Esf. cil.* II 4, 188, 1 y ss.

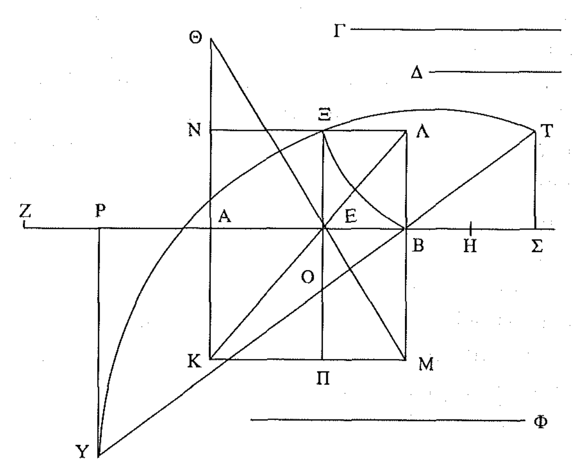
[24] Es decir, EB.

mo la misma recta dada a ZA. Y esto queda demostrado a continuación, pues Arquímedes, tras explicarlo por extenso, lo reduce a otro problema, cuya demostración no da en *Sobre la esfera y el cilindro*.

* * *

Dada en posición una recta AB y dados dos puntos A, B y la razón que guarda la recta Γ con la recta Δ, cortar AB por el punto E y añadir las rectas ZA, HB, de manera que Γ sea a Δ como ZE a EH y, además, ZA sea a AE como una recta dada a BE, y HB sea a BE como la misma recta dada a EA.

Dése por hecho, y trácense las rectas ΘAK, ΛBM perpendiculares a AB, y constrúyanse, iguales a la recta dada, cada una de las rectas AK, BM. Una vez trazadas KE, ME, prolónguense hasta Λ, Θ, y trácese también KM; y por el punto Λ trácese ΛN paralela a AB, y por el punto E, ΞEOΠ paralela a NK.



Puesto que ZA es a AE como MB a BE —pues se había
164 supuesto— y, por otro lado, MB es a BE como ΘA a AE por la

semejanza de triángulos[25], entonces ZA es a AE como ΘA a AE. Por tanto, ZA es igual a ΘA [*Elem.* V 9]. Por la misma razón, también BH es igual a BΛ. Y puesto que la suma de ΘA, AE es a la suma de MB, BE como la suma de KA, AE a la suma de ΛB, BE —pues cada una de esas razones es la misma que la de AE a EB—, entonces el rectángulo comprendido por la suma de ΘA, AE y la suma de ΛB, BE es igual al rectángulo comprendido por la suma de KA, AE y la suma de MB, BE.

Constrúyanse cada una de las rectas AP, BΣ iguales a KA.

Puesto que la suma de las rectas ΘA, AE es igual a ZE y que, por otro lado, la suma de ΛB, BE es igual a EH, y que la suma de KA, AE es igual a PE, y que la suma de MB, BE es igual a ΣE, y que se había demostrado que el rectángulo comprendido por la suma de ΘA, AE y la suma de ΛB, BE es igual al rectángulo comprendido por la suma de KA, AE y la suma de MB, BE, entonces el rectángulo ZEH es igual al rectángulo PEΣ. Por ello, si el punto P cae entre los puntos A, Z, entonces el punto Σ caerá por fuera de H y a la inversa. Y puesto que la recta Γ es a la recta Δ como ZE a EH y, por otro 166
lado, ZE es a EH como el rectángulo ZEH es al cuadrado de lado EH, entonces Γ es a Δ como el rectángulo ZEH es al cuadrado de lado EH. Y se había demostrado que el rectángulo ZEH era igual al rectángulo PEΣ. Por tanto, Γ es a Δ como el rectángulo PEΣ al cuadrado de lado EH.

Trácese EO igual a BE, y después de trazar BO prolónguese ésta por ambos lados, y córtenla en los puntos T, Y las rectas ΣT, PY trazadas perpendicularmente desde los puntos Σ, P.

Puesto que TY ha sido trazada por un punto dado B hacia una recta AB dada en posición y formando un ángulo dado

[25] Se refiere a los triángulos MBE, AΘE; *Elem.* VI 4.

EBO que es la mitad de un recto, entonces TY ha sido dada en posición [*Dat.* 30]. Y una vez trazadas las rectas ΣT, PY desde los puntos Σ, P dados en posición la cortan[26] en los puntos T, Y; luego los puntos T, Y han sido dados [*Dat.* 25]. Luego la recta TY ha sido dada en posición y en magnitud. Y puesto que por la semejanza de los triángulos EOB, ΣTB el lado TB es al BO como el ΣB es al BE [*Elem.* VI 4], también por composición [*Elem.* V 18] TO es a OB como ΣE es a EB. Pero BO es a OY como BE es a EP [*Elem.* VI 2]. Por tanto, *ex aequali* [*Elem.* V 22], TO es a OY como ΣE es a EP. Pero TO es a OY como el rectángulo TOY es al cuadrado de lado OY, mientras que ΣE es a EP como el rectángulo ΣEP al cuadrado de lado EP. Luego el rectángulo TOY es al cuadrado de lado OY como el rectángulo ΣEP al cuadrado de lado EP. Y, tomando la proporción en alternancia [*Elem.* V 16], el rectángulo TOY es al rectángulo ΣEP como el cuadrado de lado OY es al cuadrado de lado EP. Y el cuadrado de lado OY es el doble del cuadrado de lado EP, puesto que también el cuadrado de lado OB es el doble del cuadrado de lado BE. Luego también el rectángulo TOY es el doble del rectángulo ΣEP; y se había demostrado que el rectángulo ΣEP guardaba con el cuadrado de lado EH la razón de Γ a Δ; luego también el rectángulo TOY guarda con el cuadrado de lado EH la razón del doble de Γ a Δ. Por otro lado, el cuadrado de lado EH es igual al cuadrado de lado ΞO, pues cada una de las rectas EH,
168 ΞO es igual a la suma de ΛB, BE. Por tanto, el rectángulo TOY guarda con el cuadrado de lado ΞO la razón del doble de Γ a Δ. Y la razón del doble de Γ con Δ ha sido dada; luego también ha sido dada la razón del rectángulo TOY con el cuadrado de lado ΞO.

[26] Es decir, cortan a las prolongaciones de la recta BO.

Si ahora hacemos que Δ sea al doble de Γ como TY a otra recta Φ, y trazamos en torno a TY una elipse de manera que el cuadrado de las ordenadas en el ángulo ΞOB —es decir, en medio ángulo recto— equivalga a los rectángulos aplicados a Φ deficientes en un rectángulo comprendido por TY, Φ, pasará[27] por el punto Ξ por la recíproca de la proposición 20 del Libro I de los *Elementos de las cónicas* de Apolonio.

Trácese y sea YΞT.

Entonces el punto Ξ tocará a la elipse dada en posición. Y puesto que ΛK es la diagonal del paralelogramo NM, entonces el rectángulo NΞΠ es igual al rectángulo ABM [*Elem.* I 43]. Por tanto, si por el punto B trazamos una hipérbola de asíntotas ΘK, KM, pasará por el punto Ξ [*Cón.* II 12] y habrá sido dada en posición por haber sido dados también en posición el punto B y las dos rectas AB, BM y, por ello, las asíntotas ΘK, KM.

Trácese y sea ΞB[28].

Entonces el punto Ξ toca a la hipérbola dada en posición; y también tocaba a la elipse dada en posición. Luego el punto Ξ ha sido dado [*Dat.* 25]. Y, a partir de él, la perpendicular ΞE; luego también ha sido dado el punto E [*Dat.* 30]. Y puesto que MB es a BE como ZA a AE, y AE ha sido dada, entonces también ha sido dada AZ. Por la misma razón, también ha sido dada HB.

Y la síntesis se compondrá así: con la misma construcción, sea AB la recta dada que hay que cortar y AK la otra recta dada y sea la razón dada la de Γ a Δ.

Trácese BM, que sea igual a AK, perpendicular a AB, y trácese KM, y constrúyanse AP y BΣ iguales a KA, y desde los

[27] Entiéndase: «la elipse».

[28] Entiéndase: «la hipérbola mencionada».

puntos P, Σ trácense las perpendiculares PY, ΣT y en el punto B[29] constrúyase el ángulo ABO igual a medio recto, y una vez prolongada BO por ambos lados, corte a las rectas ΣT, PY en los puntos T, Y, y sea Δ al doble de Γ como TY a Φ, y en torno a TY trácese una elipse de manera que el cuadrado de las ordenadas en medio recto equivalga a los rectángulos aplicados a Φ deficientes en un rectángulo semejante a TY, Φ; y por el punto B y con asíntotas AK, KM trácese la hipérbola BΞ que corte a la elipse en el punto Ξ, y a partir de Ξ trácese ΞE perpendicular a AB y prolónguese hasta Π y por el punto Ξ trácese ΛΞN paralela a AB y prolónguense KA, MB hasta los puntos Λ, Θ y, trazada ME, prolónguese y corte a KN en el punto Θ.

Puesto que BΞ es una hipérbola y ΘK, KM sus asíntotas, el rectángulo NΞΠ es igual al rectángulo ABM por la proposición 8 del Libro II de los *Elementos de las cónicas* de Apolonio[30], y por ello KEΛ es una recta [*Elem.* I 43, recíp.]. Constrúyanse AZ igual a ΘA y BH igual a ΛB. Puesto que el doble de Γ es a Δ como Φ a TY, y Φ es a TY como el rectángulo TOY es al cuadrado de lado ΞO por la proposición 20 del Libro I de los *Elementos de las cónicas* de Apolonio[31], entonces el doble de Γ es a Δ como el rectángulo TOY al cuadrado de lado ΞO. Y puesto que TB es a BO como ΣB a BE, también por composición [*Elem.* V 18] TO será a OB como ΣE a EB. Pero BO es a OY como BE a EP; por tanto, *ex aequali* [*Elem.* V 22], TO es a OY como ΣE a EP. Y, por tanto, el rectángulo TOY es al cuadrado de lado OY como el rectángulo ΣEP al cuadrado de EP. Y tomando la proporción en alternancia [*Elem.* V 16], el rectángulo TOY es al rectángulo

[29] Es decir, «con vértice en B».

[30] En nuestros mss. y ediciones, II 12.

[31] En nuestros mss. y ediciones, I 21.

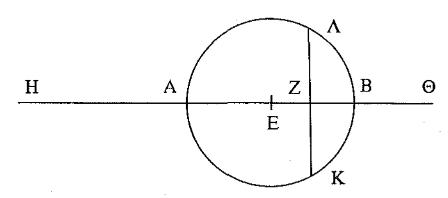
ΣEP como el cuadrado de lado OY al cuadrado de lado EP. 172
Pero el cuadrado de lado OY es el doble del cuadrado de lado EP, porque también el cuadrado de lado BO es el doble del cuadrado de lado BE, pues BE es igual a EO al ser medio ángulo recto cada uno de los ángulos de vértice en B, O. Luego el rectángulo TOY es el doble del rectángulo ΣEP. Por consiguiente, puesto que se había demostrado que el doble de Γ es a Δ como el rectángulo TOY al cuadrado de lado ΞO, también estarán en proporción las mitades de los antecedentes. Luego Γ es a Δ como el rectángulo PEΣ es al cuadrado de lado ΞO, es decir, al de lado EH, pues ΞO es igual a EH por ser cada una de ellas igual a la suma de ΛB, BE. Y puesto que la suma de ΘA, AE es a la suma de MB, BE como la suma de KA, AE a la suma de ΛB, BE —pues cada una de estas razones es la misma que la de AE a EB—, entonces el rectángulo comprendido por la suma de ΘA, AE y la suma de ΛB, BE es igual al rectángulo comprendido por la suma de KA, AE y la suma de MB, BE. Pero la recta ZE es igual a la suma de ΘA, AE, y la recta EH es igual a la suma de ΛB, BE, y la recta PE es igual a la suma de KA, AE y la recta EΣ es igual a la suma de MB, BE. Luego el rectángulo ZEH es igual al rectángulo PEΣ. Pero Γ es a Δ como el rectángulo PEΣ es al cuadrado de lado EH; luego Γ es a Δ también como el rectángulo ZEH es al cuadrado de lado EH. Pero el rectángulo ZEH es al cuadrado de lado EH como la recta ZE a la recta EH. Luego Γ es a Δ como ZE a EH. Y puesto que MB es a BE como ΘA a AE y, por otro lado, ΘA es igual a ZA, entonces MB es a BE como ZA a AE. Por la misma razón, también KA es a AE como HB a BE.

Luego dada la recta AB y otra recta AK y la razón de Γ a Δ, se ha tomado un punto al azar E en la recta AB y se han añadido las rectas ZA, HB y han resultado las rectas ZE, EH 174
que guardan la razón dada y, además, la recta dada MB es a

BE como ZA a AE y la propia recta dada KA es a AE como HB es a BE. Que es lo que había que hacer.

Una vez demostrado esto, es posible cortar la esfera dada en la razón dada del modo siguiente:

Sea AB el diámetro de la esfera dada y sea la de Γ a Δ la razón dada que han de guardar entre sí los segmentos de la esfera. Y sea E el centro de la esfera, y tómese en el diámetro AB un punto Z y añádansele las rectas HA, ΘB de manera que Γ sea a Δ como HZ a ZΘ y además HA sea a AZ como el radio dado EB a BZ y que, por otro lado, ΘB sea a BZ como la propia recta dada EA es a AZ. Ya se ha demostrado antes que es posible hacer esto. Y por el punto Z trácese KZΛ perpendicular a AB y corte a la esfera un plano que al trazarlo pase por KΛ y sea perpendicular a AB.



Digo que los segmentos de la esfera guardan entre sí la razón de Γ a Δ.

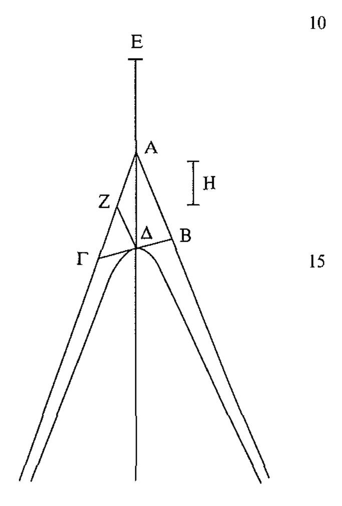
Puesto que HA es a AZ como EB a BZ, también serán proporcionales por composición [*Elem.* V 18]; luego HZ es a ZA como la suma de EB más BZ es a BZ. Luego el cono que tiene por base el círculo de diámetro KΛ y por altura ZH es igual al segmento de esfera que tiene la misma base y por altura ZA [*Esf. cil.* II 2]. A la vez, puesto que ΘB es a BZ como EA a AZ, también, por composición, ΘZ es a BZ como la suma de EA, AZ a AZ. Luego el cono que tiene por base el círculo de diámetro KΛ y por altura ZΘ es igual al segmento de esfera que tiene la misma base y la altura BZ.

Por consiguiente, puesto que los conos indicados están 176 sobre la misma base, son entre sí como sus alturas [*Esf. cil.*, lema 1, post. 16], es decir, que guardan la razón de HZ a ZΘ, esto es, la de Γ a Δ y, por tanto, los segmentos de esfera guardan entre sí la razón dada. Que es lo que había que hacer.

* * *

De qué manera se ha de trazar una hipérbola por el punto dado con las asíntotas dadas lo demostraremos así, puesto que no figura en los *Elementos de las Cónicas*[32].

Sean dos rectas ΓA, AB que contienen un ángulo cualquiera con vértice en A, y dese un punto Δ y propóngase trazar una hipérbola de asíntotas ΓA, AB que pase por Δ.



Trácese AΔ y prolónguese hasta E, y constrúyase AE igual a ΔA, y por el punto Δ trácese ΔZ paralela a AB y sea ZΓ igual a AZ y, una vez trazada ΓΔ, prolónguese hasta B y sea el rectángulo comprendido por ΔE, H igual al cuadrado de lado ΓB y, una vez prolongada AΔ, trácese la hipérbola en torno a ella por el punto Δ de manera que el cuadrado de las ordenadas equivalga a los rectángulos aplicados a H excedentes en un rectángulo semejante al comprendido por ΔE, H.

Digo que ΓA, AB son las asíntotas de la hipérbola trazada.

[32] Heiberg considera que este lema sobre la construcción de la hipérbola es una adición de Eutocio al texto de Diocles.

Puesto que ΔZ es paralela a BA y ΓZ es igual a ZA, entonces también ΓΔ es igual a ΔB [*Elem.* VI 2]. De manera que el cuadrado de lado ΓB es el cuádruple del cuadrado de lado ΓΔ. Y el cuadrado de lado ΓB es igual al rectángulo comprendido por ΔE, H; luego cada uno de los cuadrados de lado ΓΔ, ΔB es la cuarta parte de la figura comprendida por ΔE, H. Luego las rectas ΓA, AB son las asíntotas de la hipérbola por el teorema 1 del Libro II de los *Elementos de las cónicas* de Apolonio.

EUTOCIO

COMENTARIO A LA «MEDIDA DEL CÍRCULO»

A LA PROPOSICIÓN 3

En este teorema se nos requiere constantemente hallar la III 232 raíz cuadrada del número dado. Pero es imposible hallarlo exactamente para el caso de un número que no sea cuadrado, pues un número multiplicado por sí mismo produce un número cuadrado, pero un número más una fracción multiplicado por sí mismo nunca produce un número entero, sino también más una fracción. Cómo hay que hacer para hallar aproximadamente la raíz cuadrada del número dado lo dice Herón en la *Métrica*, y lo dicen también Papo y Teón y lo dicen también otros muchos que han comentado el *Almagesto* de Claudio Ptolomeo. De modo que no es en absoluto preciso que investiguemos sobre ese punto, puesto que los interesados pueden leerlo en ellos.

[*Y* ⟨*sea*⟩ *el ángulo correspondiente a* ΓΕΖ *un tercio de un recto*[1]] Si, tras cortar por la mitad el arco de un hexágono y tomar su mitad correspondiente a Γ, trazamos ΕΖ, el ángulo correspondiente a ΓΕΖ será un tercio de un recto. Pues siendo el arco tomado junto a Γ la mitad del del hexágono, será un doceavo del círculo. De modo que también el ángulo correspondiente a ΓΕΖ con vértice en el centro es un doceavo de los cuatro rectos. De modo que es un tercio de un recto.

[1] *Med. círc.* 236, 13-14.

[*Luego* EZ *guarda con* ZΓ *la razón de 306 a 153*[2]] Que EZ es el doble de ZΓ es evidente a partir de lo que sigue: si, prolongando EZ hasta Γ y poniendo una recta igual a ella
234 trazamos una recta desde E, habrá quedado construido[3] con vértice en E un ángulo de dos tercios de recto. Y también el ángulo de vértice en Z es de dos tercios de recto. Luego ΓEZ es la mitad de un triángulo equilátero, y por estar cortada por la mitad en el punto Γ la base del equilátero que es igual a EZ, EZ es igual a ZΓ.

[*Y* EΓ *guarda con* ΓZ *la razón de 265 a 153*[4]] Dado que se ha supuesto que EZ es 306, si lo multiplicamos por sí mismo resultará 93636. Y ΓZ es 153. De modo que su cuadrado será 23409. Y puesto que el cuadrado de EZ es igual a la suma de los de EΓ, ΓZ, si del de EZ que es 93636 restamos el de ΓZ, que es 23409, quedará que el cuadrado de EΓ es 70227, cuya raíz cuadrada es 265 más una fracción mínima e imperceptible, pues faltan dos unidades para el cuadrado exacto de 265. Las multiplicaciones figuran a continuación:

EZ 306		ZΓ 153	y 265
por 306		por 153	por 265
	91800	15300	40000 12000 1000
	1836	5000 2500 150	12000 3600 300
		300 159	1325
total 93636			
		total 23409	total 70225

Por tanto, el cuadrado de EΓ es 70227.

Luego faltan dos unidades para el cuadrado exacto.

[2] *Med. círc.* 236, 14-15.

[3] [*El ángulo de vértice en* Γ *de dos tercios de recto*].

[4] *Med. círc.* 236, 15-16.

Córtese el ángulo ΖΕΓ por la mitad mediante la recta ΕΗ. Entonces ΖΕ es a ΕΓ como ΖΗ a ΗΓ[5] por el tercer teorema del Libro VI de los *Elementos* de Euclides. Y, por composición, la suma de ΖΕ, ΕΓ es a ΕΓ como ΖΓ es a ΓΗ y, tomando la proporción en alternancia, la suma de ΖΕ, ΕΓ es a 236
ΖΓ como ΕΓ a ΓΗ. Y la suma de ΕΖ, ΕΓ es mayor que 571, pues se ha supuesto que ΖΕ era 306 y que ΕΓ era 265 más una fracción, luego la suma es mayor que 571. Y ΖΓ es 153. Luego la suma de ΖΕ, ΕΓ guarda con ΖΓ una razón mayor que la de 571 a 153. De manera que también ΕΓ guarda con ΗΓ una razón mayor que la de 571 a 153.

[*Luego el cuadrado de ΗΕ guarda con el cuadrado de ΗΓ la razón de 349450 a 23409*[6]] Se llegará a esta conclusión del modo siguiente: puesto que se ha demostrado que ΕΓ guarda con ΓΗ una razón mayor que la de 571 a 153, si suponemos que ΕΓ es 571 y ΓΗ 153, entonces el cuadrado de ΕΓ será 326041 y el de ΓΗ 23409 y su suma, que es igual al cuadrado de ΕΗ, será 349450. La raíz cuadrada de éste es 591 1/8 aproximadamente, pues faltan aproximadamente 21 unidades 1/6 1/15 para el cuadrado exacto. Luego el cuadrado de ΕΗ guarda con el cuadrado de ΗΓ la razón de 349450 a 23409, y en longitud[7] la razón de 591 1/8 a 153. Las multiplicaciones figuran a continuación:

[5] *Med. círc.* 236, 16-17.

[6] *Med. círc.* 236, 20-238, 1.

[7] Téngase presente la concepción fundamentalmente geométrica de la matemática griega: la teoría de razones y proporciones fue establecida con vistas a comparar no números, sino magnitudes geométricas, que pueden ser comparadas *mêkei* («en longitud») —es decir, linealmente— o *dynámei* («en potencia») considerando en este segundo caso los cuadrados construidos tomando por lado las magnitudes lineales correspondientes.

EΓ 571	HΓ 153	591 1/8
por 571	por 153	por 591 1/8
250000 35500	15300	250000 45562 1/2
35000 970	5000 2500 150	45000 8190 11 1/4
571	300 159	591 1/8
		62 1/2 11 1/4 1/8 1/64
total 326041	total 23409	total 349428 1/2 1/4 1/64

De esto se concluye que el cuadrado de EH es 349450.

luego faltan para el exacto 21 unidades 1/6 1/15 aproximadamente.

[De nuevo ⟨córtese⟩ por la mitad el ángulo HEΓ mediante la recta ΘE. Por la misma razón, entonces, EΓ guarda con 238 *ΓΘ una razón mayor que la de 1162 1/8 a 153*[8]] Por haber cortado por la mitad el ángulo, resulta que HE es a EΓ como HΘ a ΘΓ. Y, por composición, la suma de HE, EΓ es a EΓ como HΓ a ΓΘ y, tomando la proporción en alternancia, la suma de HE, EΓ es a HΓ como EΓ a ΓΘ y EΓ es 571 más una fracción y EH es 591 1/8 más una fracción. Luego ⟨sumados⟩ son mayores que 1162 1/8. Y HΓ es 153.

[Luego ΘE guarda con ΘΓ una razón mayor que la de 1172 1/8 a 153[9]] Puesto que se ha demostrado que EΓ guarda con ΘΓ una razón mayor que la de 1162 1/8 a 153, si supusiéramos que guardan esa razón, el cuadrado de EΓ será 1350534 1/2 1/64 y el cuadrado de ΓΘ 23409. Luego el cuadrado de EΘ, que es igual a la suma de los de EΓ, ΓΘ será 1373943 1/2 1/64, cuya raíz cuadrada es 1172 1/8 aproximadamente. Pues faltan 66 unidades 1/2 para el cuadrado exacto. Las multiplicaciones figuran a continuación:

[8] *Med. círc.* 238, 2-4.

[9] *Med. círc.* 238, 4-5.

ΕΓ 1162 1/8	ΘΓ 153	1172 1/8
por 1162 1/8	por 153	por 1172 1/8
1000000 100000 62125	15300	1000000 100000 72125
100000 16212 1/2	5000 2500 150	100000 17212 1/2
66000 3600 127 1/2	300 159	77000 4900 148 1/2 1/4
2200 124 1/4		2200 144 1/4
125 12 1/2 7 1/2 1/4 1/64	total 23409	125 12 1/2 8 1/2 1/4 1/4 1/64
total 1350534 1/2 1/64		
		total 1373877 1/64
El cuadro de ΕΘ, igual a la suma de los ΕΓ, ΓΘ es 1373943 1/2 1/64.		Luego faltan para el exacto 66 unidades 1/2.

[*De nuevo ⟨córtese⟩ por la mitad el ángulo* ΘΕΓ *median-* 240
te la recta ΕΚ. *Entonces* ΕΓ *guarda con* ΓΚ *una razón mayor que la de 2334 1/4 a 153*[10]] De nuevo, por haber cortado por la mitad el ángulo ΘΕΓ, ΘΕ es a ΕΓ como ΘΚ a ΓΚ. Y, por composición, la suma de ΘΕ, ΕΓ es a ΕΓ como ΘΓ a ΓΚ. Tomando la proporción en alternancia, la suma de ΘΕ, ΕΓ es a ΘΓ como ΕΓ es a ΓΚ. Y puesto que se ha demostrado que ΘΕ es 1172 1/8 más una fracción y ΕΓ es 1162 1/8 más una fracción, la suma de ΘΕ, ΕΓ es mayor que 2334 1/4. Y se ha supuesto que ΘΓ es 153. Luego la suma de ΘΕ, ΕΓ guarda con ΘΓ una razón mayor que 2334 1/4 a 153.

[*Luego* ΕΚ *guarda con* ΓΚ *una razón mayor que la de 2339 1/4 a 153*[11]] De nuevo, dado que se ha supuesto que ΕΓ es 2334 1/4, y ΓΚ 153, el cuadrado de ΕΓ será 5448723 1/16, y el de ΓΚ 23409. Y el cuadrado de ΚΕ es igual a ⟨la suma de⟩ estos; luego será 5472132 1/16, cuya raíz cuadrada es aproximadamente 2339 1/4, pues a su cuadrado le faltan 41 unidades 1/2 para el exacto. Las multiplicaciones figuran a continuación:

[10] *Med. círc.* 238, 6-7.
[11] *Med. círc.* 238, 8-9.

242

ΕΓ 2334 1/4	153	2339 1/4
por 2334 1/4	por 153	por 2339 1/4
4000000 600000 68500	15300	4000000 600000 60000 18500
600000 99000 1275	5000 2500 150	600000 99000 2775
69900 127 1/2	300 159	69900 277 1/2
8000 1200 120 16 1		18000 2700 270 81 2 1/4
575 7 1/2 1 1/16	total 23409	575 7 1/2 2 1/4 1/16
total 5448723 1/16		total 5472090 1/2 1/16
De esto se concluye que el cuadrado de ΕΚ es 5472132 1/16.		Luego faltan para el exacto 41 unidades 1/2.

[Y ⟨córtese⟩ por la mitad el ángulo ΚΕΓ mediante ΕΛ. Entonces ΕΓ guarda con ΓΛ una razón mayor que 4673 1/2 a 153[12]] Otra vez, por haber cortado por la mitad el ángulo, ΚΕ es a ΕΓ como ΚΛ a ΛΓ. Y, por composición, la suma de ΚΕ, ΕΓ es a ΕΓ como ΚΓ a ΓΛ. Tomando la proporción en alternancia, la suma de ΚΕ, ΕΓ es a ΓΚ como ΕΓ a ΛΓ. Y ΚΕ es 2339 1/4 más una fracción, y ΕΓ 2334 1/4 más una fracción. Luego la suma de ΚΕ, ΕΓ es mayor que 4673 1/2. Y ΚΓ es 153. Luego la suma de ΕΚ, ΕΓ guarda con ΚΓ una razón mayor que la de 4673 1/2 a 153. Y la suma de ΚΕ, ΕΓ es a ΚΓ como ΕΓ a ΓΛ. Luego ΕΓ guarda con ΓΛ una razón mayor que la de 4673 1/2 a 153.

Puesto que el ángulo ΖΕΓ, que es un tercio de un recto,
244 es la duodécima parte de los cuatro rectos, y el ángulo ΗΕΓ es su mitad, el ángulo ΗΕΓ sería un veinticuatroavo. Y el ángulo ΘΕΓ es su mitad; de modo que es 1/48. Y el ángulo ΚΕΓ es su mitad; luego es 1/96; siendo su mitad el ángulo ΛΕΓ, es 1/192.

Póngase —dice— el ángulo ΓΕΜ igual a éste, y prolónguese ΖΓ hasta Μ. Entonces el ángulo ΛΕΜ, que es el doble

[12] *Med. círc.* 238, 9-10.

del ΑΕΓ, es 1/96 de los cuatro rectos. De modo que ΑΜ es el lado del polígono de 96 lados circunscrito al círculo[13].

Puesto que se ha demostrado que ΕΓ guarda con ΑΓ una razón mayor que la de 4673 1/2 a 153, y ΑΓ es el doble de ΕΓ, mientras que ΑΜ lo es de ΑΓ, entonces ΑΓ guarda con ΑΜ una razón mayor que la de 4673 1/2 a 153. Entonces, tomando la proporción invertida, ΑΜ guarda con ΑΓ una razón menor que la de 153 a 4673 1/2. Y puesto que ΑΜ es el lado del polígono de 96 lados, entonces el perímetro del polígono es 14688, pues ése es el producto de 96 por 153. Luego el perímetro del polígono guarda con el diámetro ΑΓ una razón menor que la de 14688 a 4673 1/2. Luego el perímetro del polígono es el triple del diámetro del círculo y aún lo excede en 667 unidades y media. Eso es menor de la séptima parte del diámetro en una unidad y un séptimo. Pues el producto de 667 1/2 por 7, que es 4672 1/2, es menos que el diámetro en una unidad. Puesto que el polígono es menor que el triple más un exceso de un séptimo, mientras que el perímetro del círculo es menor que el del polígono, entonces con más razón la circunferencia del círculo es mayor que el triple y aún lo sobrepasa en menos de una séptima parte.

[Después, construyendo la parte restante de la proposición, dice: *sea un círculo de diámetro ΑΓ y el ángulo ΒΑΓ un* 246
tercio de un recto[14]] Esto será si tomando desde Γ la recta ΓΒ, igual al lado de un hexágono, trazamos ΑΒ. Pues el ángulo con vértice en el centro que comprende el arco de un hexágono es dos tercios de recto, mientras que si está en la circunferencia, un tercio.

Puesto que el ángulo ΑΒΓ es recto y el ángulo ΒΑΓ es un tercio, entonces el ΑΓΒ son dos tercios. Si entonces, prolon-

[13] Cf. *Med. círc.* 238, 13-240, 1.

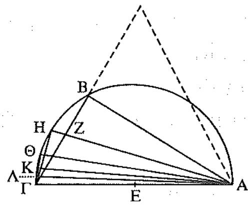
[14] *Med. círc.* 240, 12-13.

gando ΓB hasta B y tomando una recta igual a ella la unimos desde A[15], el triángulo será equilátero, y puesto que la perpendicular AB corta por la mitad la base, AΓ es el doble de ΓB. Si de nuevo tomamos AΓ como 1560, ΓB será 780, y el cuadrado de AΓ será 2433600, y el de ΓB 608400. Y si restamos el cuadrado de ΓB del cuadrado de AΓ, quedará como resto el cuadrado de AB, 1825200, cuya raíz cuadrada es 1351 aproximadamente. Pues su cuadrado excede del exacto en una unidad. Por eso dice *AB guarda con BΓ una razón menor que la de 1351 a 780*[16]. Las multiplicaciones figuran a continuación:

AΓ 1560	ΓB 780	1351
por 1560	por 780	por 1351
1000000 500000 60000	490000 56000	1000000 300000 51000
500000 250000 30000	56000 6400	300000 90000 15300
60000 33600		50000 15000 2550
	total 608400	1351
total 2433600		
		total 1825201
Si quitamos el cuadrado de BΓ del cuadrado de ΓA, quedan 1825200.		Excede del exacto en una unidad.

248 [*Córtese por la mitad el ángulo BAΓ mediante AZH. Puesto que el ángulo BAH es igual al HΓB* —pues comprenden el

[15] La construcción a la que hace referencia Eutocio, inspirada en la correspondiente ilustración de la *Medida del círculo*, es la siguiente:



[16] *Med. círc.* 240, 13-14.

mismo arco— *y también al ΗΑΓ, entonces también el ΗΓΒ es igual al ΗΑΓ. Y el recto correspondiente a ΑΗΓ es común; por tanto el ángulo restante, ΗΖΓ es igual al restante, el ΑΓΗ. Luego el triángulo ΑΗΓ es equiángulo del ΓΗΖ. Luego ΑΗ es a ΗΓ como ΓΗ es a ΗΖ y como ΑΓ a ΓΖ*[17]] Pues los lados de los triángulos equiángulos están en proporción, y los que subtienden ángulos iguales son homólogos.

[*Pero ΑΓ es a ΓΖ como la suma de ΓΑΒ es a ΓΒ. Por tanto la suma de ΒΑΓ es a ΓΒ como ΑΗ a ΗΓ*[18]] Puesto que el ángulo ΒΑΓ ha sido cortado por la mitad por ΑΖ, la recta ΒΑ es a ΑΓ como ΒΖ a ΖΓ. Y, por composición, la suma de ΒΑ, ΑΓ es a ΑΓ como ΒΓ a ΓΖ. Y, tomando la proporción en alternancia, la suma de ΒΑ, ΑΓ es a ΒΓ como ΑΓ a ΓΖ. Y ΑΒ es menor que 1351, ΑΓ es 1560 y ΒΓ 780. Luego la suma de ΑΒ, ΑΓ guarda con ΒΓ una razón menor que la de 2911 a 780. Luego ΑΓ guarda con ΓΖ una razón menor que la de 2911 a 780. Y ΑΓ es a ΓΖ como ΑΗ a ΗΓ. Luego ΑΗ guarda con ΗΓ una razón menor que la de 2911 a 780. Por eso, el cuadrado de ΑΗ será 8473921, y el de ΗΓ 6008400; y el cuadrado de ΑΓ es igual a ⟨la suma⟩ de estos; luego éste será 9082321, cuya raíz cuadrada es 3013 1/2 1/4 aproximada- 250
mente, pues su cuadrado excede del cuadrado exacto en 368 1/16 unidades. Por eso dice que *ΑΓ guarda con ΓΗ una razón menor que la de 3013 1/2 1/4 a 780*[19]. Las multiplicaciones figuran a continuación:

[17] *Med. círc.* 240, 15-21, aunque los textos no coinciden literalmente.
[18] *Med. círc.* 240, 21-23.
[19] *Med. círc.* 240, 25-242, 1.

AH 2911	HΓ 780	3013 1/2 1/4
por 2911	por 780	por 3013 1/2 1/4
4000000 1800000 22000	490000 56000	9000000 39000 1500 750
1800000 819900	56000 6400	30135 2 1/2
29110		9039 1 1/2 1/2 1/4
2911	total 608400	1500 5 1 1/2 1/4 1/8
		750 2 1/2 1/2 1/4 1/8 1/16
total 8473921		
		total 9082689 1/16
La suma de los cuadrados de AH, HΓ 9082321.		Excede del exacto en 368 unidades 1/16.

[⟨*Córtese*⟩ *por la mitad el ángulo ΓAH mediante la recta AΘ*[20]] Por haber sido cortado por la mitad el ángulo y por la semejanza de triángulos y por la proporcionalidad entre los lados y por composición y tomando la proporción en alternancia, la suma de HA, AΓ es a HΓ como AΘ es a ΘΓ. Y se había supuesto que AH era menor que 2911 y AΓ menor que 3013 1/2 1/4. Luego la suma de HA, AΓ es menor que 5924 1/2 1/4. Y HΓ es 780. Luego la suma de HA, AΓ guarda con HΓ una razón menor que la de 5924 1/2 1/4 a 780. De modo que también AΘ guarda con ΘΓ una razón menor que la de 5924 1/2 1/4 a 780. De modo que también AΘ guarda con ΘΓ una razón menor que la de 455 1/2 1/4 a 60 —pues cada una
252 es 1/13 de cada una— y ⟨tomando⟩ sus cuádruples, AΘ guarda con ΘΓ una razón menor que la de 1823 a 240. Por eso dice que *cada una es 4/13 de cada una*[21]. Y puesto que AΘ es 1823, entonces su cuadrado es 3323329. Y ΘΓ es 240 y su cuadrado 57600. Y el cuadrado de AΓ es igual a ⟨la suma de⟩ los cuadrados de AΘ, ΘΓ. Luego será 3380929, cuya raíz cuadrada es 1838 9/11, pues su cuadrado excede del exacto en 321 unidades aproximadamente. De manera que AΓ guar-

[20] *Med. círc.* 242, 1-2.

[21] *Med. círc.* 242, 4.

da con ΘΓ una razón menor que la de 1838 9/11 a 240. Las multiplicaciones figuran a continuación:

ΑΘ 1823	ΘΓ 240	1838 1/9 1/11[22]
por 1823	por 240	por 1838 1/9 1/11
1000000 800000 23000	48000	1000000 800000 30000 8000 111 1/9 90 10/11
800000 640000 10000 6000 2400	8000 1600	800000 640000 24000 6400 88 8/9 72 8/11
20000 10000 6000 460		30000 24900 240 3 3/9 2 8/11
3000 2469	total 57600	8000 6400 240 64 8/9 8 /11
		111 1/9 88 8/9 3 3/9 8/9 1/81 1/99
total 3323329		90 10/11 72 8/11 2 8/11 8/11 1/99 1/121
		total 3381250 aproximadamente
El cuadrado de lado ΑΓ es igual a la suma de estos: 3380929.		Luego excede del exacto en 321 unidades aproximadamente.

[Y de nuevo ⟨córtese⟩ por la mitad el ángulo ΘΑΓ me- 254
diante ΚΑ[23]] De nuevo por haber cortado el ángulo por la mitad y por la semejanza de triángulos y por la proporcionalidad entre los lados y por composición y tomando la proporción en alternancia, la suma de ΘΑ, ΑΓ es a ΓΘ como ΑΚ a

[22] A pesar de que un poco más arriba (252, 9) se ha reflejado correctamente la cifra 1838 9/11 (,αωλη θ ια′), a lo largo del cálculo se emplea 1838 1/9 1/11 (,αωλη θ′ ια′), lo que Heiberg atribuye a un error, bien de copista, bien —más probablemente— del propio Eutocio: los cálculos son correctos con la cifra errónea, por lo que el resultado de la resta no cuadra. Heiberg restituye en el aparato crítico las operaciones con las cifras correctas del modo que sigue: 1838 9/11 por 1838 9/11= (1000000 + 800000 + 30000 + 8000 + 818 + 2/11) + (800000 + 640000 + 6400 + 654 + 6/11) + (30000 + 20000 + 4900 + 240 + 6/11) + (8000 + 6400 + 240 + 64 + 6 + 6/11) + (6 + 6/11 + 81/121) = 3381250 aproximadamente. El resultado exacto es, en realidad, 3381251 6/11 81/121 o bien 3381252 37/121, en cuyo caso la diferencia excedente sobre el exacto es aproximadamente 323.

[23] *Med. círc.* 242, 5-6.

ΚΓ. Pero la suma de ΘΑ, ΑΓ es menor que 3661 9/11, dado que se ha supuesto que ΘΑ es 1823 y ΑΓ 1838 9/11[24]. Y ΘΓ es 240. Luego la suma de ΘΑ, ΑΓ guarda con ΘΓ una razón menor que la de 3661 9/11 a 240. De manera que también ΑΚ guarda con ΚΓ una razón menor que la de 3661 9/11 a 240. Y puesto que 11/40 de 3661 9/11 es 1007 y de 240 es 66, entonces ΑΚ guarda con ΚΓ una razón menor que la de 1007 a 66. Y el cuadrado de ΑΚ es 1014049 y el de ΚΓ 4356, y al ser igual a ⟨la suma de⟩ estos, el de ΑΓ es 1018405, cuya raíz cuadrada es 1009 1/6 aproximadamente. Pues su cuadrado excede del exacto en 12 unidades 1/3 1/36. Luego ΑΓ guarda con ΓΚ una razón menor que la de 1009 1/6 a 66. Las multiplicaciones figuran a continuación:

AK	1007	ΚΓ	66		1009 1/6
por	1007	por	66	por	1009 1/6
	1000000 7000		3600 360		1000000 9166 ½ 1/6
	7049		360 36		9081 1 ½
					166 ½ 1/6 1 ½ 1/36
total 1014049		total 4356			
				total 1018417 1/3 1/36	

El cuadrado de ΑΓ es igual a la suma de estos: 1018405.

Excede del exacto en 12 unidades 1/3 1/36.

256 [*Y de nuevo ⟨córtese⟩ por la mitad el ángulo ΚΑΓ mediante ΑΛ*[25]] Por los mismos razonamientos, la suma de ΚΑ, ΑΓ es a ΚΓ como ΑΛ es a ΛΓ. Y ΑΚ es menor que 1007, ΑΓ menor que 1009 1/6 y ΚΓ es 66. Luego la suma de ΚΑ, ΑΓ guarda con ΚΓ una razón menor que la de 2016 1/6 a 66. Luego ΑΛ guarda con ΛΓ una razón menor que la de 2016 1/6 a 66. Y dado que se ha supuesto que ΑΛ es 2016 1/6 y su cuadrado 4064928 1/36, que ΛΓ es 66 y su cuadrado

[24] Aproximadamente.

[25] *Med. circ.* 242, 9.

4356 y que el cuadrado de ΑΓ es igual a ⟨la suma de⟩ éstos, éste será 4069284 1/36, cuya raíz cuadrada es 2017 1/4 aproximadamente. Por tanto, su cuadrado excede del exacto aproximadamente en 13 unidades 1/2 1/20. De modo que ΑΓ guarda con ΓΛ una razón menor que la de 2017 1/4 a 66. Las multiplicaciones figuran a continuación:

ΑΛ 2016 1/6	ΛΓ 66	2017 1/4
por 2016 1/6	por 66	por 2017 1/4
4000000 20000 10000 2333 1/3	3600 360	4000000 20000 10000 4500
20000 161 1/2 1/6	360 36	20172 1/2
10000 2060 36 1		10000 4070 49
		1 1/2 1/4
333 1/3 1	total 4356	502 1/2 1 1/2
½ 1/6 1 1/36		1/4 1/16
total 4064928 1/36		total 4069297 ½ 1/16
Siendo igual el cuadrado de AI a ⟨la suma de⟩ éstos es 4069284 1/36.		Excede del exacto en 13 unidades 1/2 1/20.

Puesto que ΑΓ guarda con ΓΛ una razón menor que la de 258
2017 1/4 a 66, entonces, tomando la proporción invertida, ΛΓ guarda con ΓΑ una razón mayor que la de 66 a 2017 1/4. Y dado que el arco ΓΒ es un sexto de círculo, entonces ΗΓ es 1/12; ΘΓ, 1/24; ΚΓ, 1/48; ΛΓ, 1/96. De modo que la recta ΛΓ es el lado de un polígono que tiene 96 lados. Y ΛΓ es 66. *Luego el perímetro del polígono guarda con el diámetro del círculo una razón mayor que la de 6336 a 2017 1/4*[26]. Y eso es el triple y aún lo excede en 284 1/4, que es mayor que diez setentayunavos. Lo cual[27] es 27 unidades 1/2 1/6 aproximadamente; y el décuple de esto es 276. Luego la circun-

[26] *Med. círc.* 242, 12-14.

[27] Es decir, «los 10/71 serían».

ferencia del círculo es, con más razón, mayor que el triple y diez setentayunavos.

Han quedado aclarados los números mencionados por él según cabía. Se ha de saber que también Apolonio de Perga en el *Ōkytókion* lo demostró llegando a mayor aproximación mediante otros cálculos. Parece que esto[28] es más preciso, pero no es útil para el fin buscado por Arquímedes, pues decíamos que la finalidad que tenía en este libro era hallar una aproximación para las necesidades de la vida. De modo que se hallará que Esporo de Nicea no estuvo acertado al reprochar a Arquímedes que no había hallado con precisión a qué recta es igual la circunferencia del círculo, según lo que él mismo afirma en los *Kēría,* cuando dice que su maestro, Filón de Gádara, llegó a cifras más precisas que las indicadas por Arquímedes —me refiero al 1/7 y a los 10/71. Y es que parece que todos los posteriores ignoraron su finalidad. Pues todos han utilizado multiplicaciones y divisiones de miríadas que no es fácil que las comprenda quien no esté familiarizado con la *Logística* de Magno. Si uno pretendiera llevarlo a mayor aproximación, sería menester hacerlo mediante las fracciones y minutos y las cuerdas del círculo, siguiendo lo indicado en el *Almagesto* de Claudio Ptolomeo; y yo lo hubiera hecho si no hubiera tenido presente, como he dicho muchas veces, que ni es posible hallar con precisión mediante lo allí indicado una recta igual a la circunferencia de un círculo y que para quien se aplica ⟨a hallar⟩ la aproximación con error escaso, le basta con lo allí dicho por Arquímedes[29].

---

[28] «Los cálculos de Apolonio».

[29] [*Comentario de Eutocio de Ascalón a la Medida del círculo de Arquímedes. Edición revisada por nuestro maestro Isidoro de Mileto el Mecánico*].

ÍNDICE DE NOMBRES

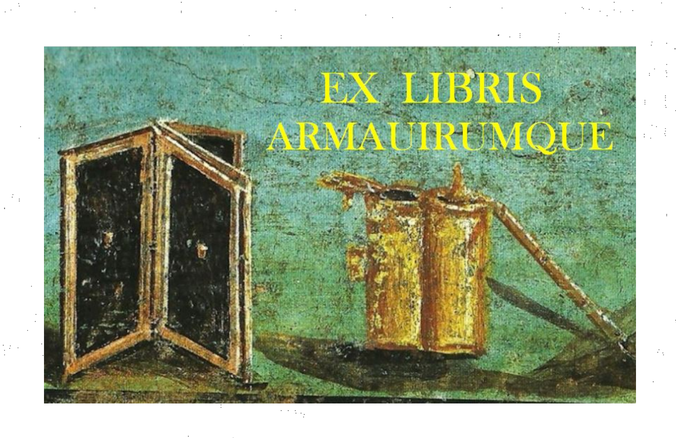
ARQUÍMEDES,
SOBRE LA ESFERA Y EL CILINDRO

SOBRE LOS CONOIDES Y ESFEROIDES

EUTOCIO,
EL PROBLEMA DÉLICO

LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

COMENTARIO A LA MEDIDA DEL CÍRCULO



ÍNDICE GENERAL

EUTOCIO